Глава 1. Параллельность прямых и плоскостей

1. а) PE $\in$ (ABD); PE $\in$ (CDE); MK $\in$ (BCD); DB $\in$ (ABD); BD $\in$ (BCD) AB $\in$ (ABC); AB $\in$ (ABD); CE $\in$ (ABC); CE $\in$ (DEC)

б) $DK \bigcap (ABC) = C; CE \bigcap (ADB) = E$

в) точки D, M, B $\in$ (ADB) и (DBC)

г) (ABC) $\cap$ (DCB) = CB; (ABD) $\cap$ (CDA) = DA; (PDC) $\cap$ (ABC) = EC

2. а) M, C_1, C $\in$ (DC_1C) и (BQC)

б) $AA_1 \in (ABB_1)$; $AA_1 \in (ADD_1)$, $AA_1 \in (ACC_1)$

в) MK $\cap$ (ABD) = R; DK $\cap$ ($A_1B_1C_1$) = D_1, BP $\cap$ ($A_1B_1C_1$) = Q

г) (AA_1B_1) $\cap$ (ACD) = AB; (PB_1C_1) $\cap$ (ABC) = BC

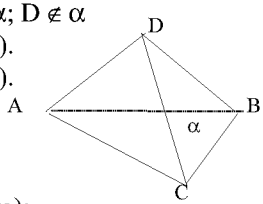
д) MK $\cap$ DC = R; B_1C_1 $\cap$ BP = Q; C_1M $\cap$ DC = C

3. а) Верно. Если три точки не лежат на одной прямой, то через них проходит единственная плоскость. Если лежат на одной прямой, то через прямую можно провести много плоскостей. В обоих случаях все три точки лежат в одной плоскости.

б) Неверно. Пример: A, B, C $\in \alpha$; D $\notin \alpha$

в) Неверно. См. рассуждение (а).

г) Неверно. См. рассуждение (а).



4. Дано: A, B, C, D $\notin \alpha$

а) могут ли A, B, C $\in l$

б) могут ли AB $\cap$ CD – ?

Доказательство (м. от противного):

а) 1) Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой, а D $\notin l$

2) Тогда через точку D и l можно провести плоскость и только одну.

3) Значит, A, B, C, D лежат в одной плоскости (акс.2), что противоречит условию A, B, C, D $\notin \alpha$.

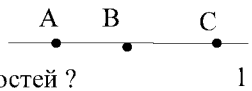
4) Вывод: наше предположение неверно, а верно то, что A, B, C $\notin l$.

б) 1) Пусть AB $\cap$ CD = O

2) Тогда через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.

3) Значит, AB, CD $\in \alpha$, т.е. A, B, C, D $\in \alpha$ (акс.2), что противоречит условию A, B, C, D $\notin \alpha$.

4) Вывод: наше предположение неверно, а верно то, что AB и CD не пересекаются.



5. Дано: A, B, C $\in l$

Доказать: $\exists \alpha$: $l \in \alpha$. Сколько таких плоскостей ?

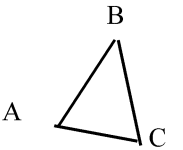
Доказательство: 1) Возьмем точку M $\notin l$, тогда через точку M и прямую l можно провести плоскость и только одну (следствие и аксиом). Таким образом, существует плоскость α такая, что $l \in \alpha$.

2) Т.к. M мы выбрали произвольно, а таких точек в пространстве много, значит, и плоскостей, проходящих через фиксированную точку и прямую l много.

6. Дано: AB, BC, AC – отрезки

Доказать: AB, BC, AC $\in \alpha$; Доказательство:

1) AB $\cap$ BC = B, т.е. пересекающиеся прямые определяют единственную плоскость α.

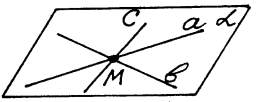


2) Т.к. AB $\in \alpha$ и BC $\in \alpha$, то по (акс.2) точки AB и BC также лежат в плоскости α, т.к. A, C $\in \alpha$, то AC $\in \alpha$ (акс.2)

3) Вывод: AB, BC, AC $\in \alpha$.

7. Дано: a $\cap$ b = M; M $\notin$ c, a $\cap$ c = R, b $\cap$ c = N

Доказать: a, b, c $\in \alpha$. Доказательство:



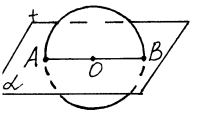
1) a $\cap$ b = M, значит, $\exists\alpha$: a, b $\in\alpha$.

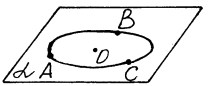
2) Т.к. a, b $\in \alpha$, то K, N $\in \alpha \Rightarrow$ KN $\in \alpha \Rightarrow$ c $\in \alpha$

3) Вывод: a, b, c $\in\alpha$.

Если M $\in$ C, то возможны два случая: C $\in \alpha$ и C $\notin \alpha$.

8. а) Неверно б) Верно



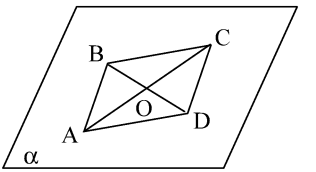


9. Дано: ABCD – параллелограмм;

AC $\cap$ BD = O; A, B, O $\in \alpha$

Доказать: C, D $\in \alpha$.

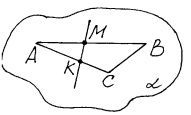
Доказательство:

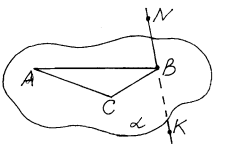


1) AC $\cap$ BD = O $\Rightarrow \exists\ \alpha$: AC, BD $\in \alpha$.

2) Т.к. AC, BD $\in \alpha \Rightarrow$ C, D $\in \alpha$ (акс.2).

10. а) Верно: б) Неверно





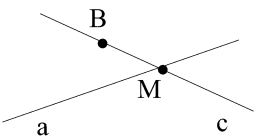
Т.к. AB $\cap$ AC = A, $\exists\alpha$: AB, AC $\in \alpha$, значит: M, K $\in \alpha$; $\Rightarrow$ MK $\in \alpha$

через одну точку проходит бесконечное множество прямых. Поэтому может быть NK $\cap \alpha$ = B.

11. Дано: B$\notin$a; B $\in$c, c$\cap$a=M

Доказать: c, a $\in\alpha$

Доказательство:



1) Через точку B и a можно провести плоскость и только одну (следствие из аксиомы), т.е. $\exists\alpha$: B, a $\in \alpha$

2) Т.к. $\left.\begin{matrix} c \cap a = M \\ a \in \alpha \end{matrix}\right| \rightarrow M \in \alpha$

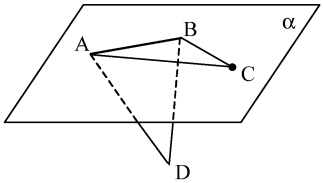
3) Т.к. B $\in\alpha$ (из 1), M $\in\alpha$ (из 2) $\Rightarrow$ BM $\in \alpha$ (акс.2) $\Rightarrow$ c $\in \alpha$

Сколько бы прямых, проходящих через точку B и пересекающих прямую a мы не провели, все они будут лежать в одной плоскости с прямой a. Рассуждения аналогично вышеизложенным.

12.

Дано: A, B, C, D $\notin \alpha$

Пересекаются ли (ABC) и (ABD) ?



Т.к. $\left.\begin{matrix} A,B \in (ABC) \\ A,B \in (ABD) \end{matrix}\right| \to A,B$

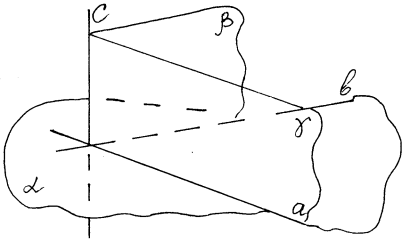
принадлежат обеим плоскостям и, значит, (ABC)$\cap$(ABD)=AB.

13. а) Нет.; б) Нет.; в) Да. (согласно аксиоме 3).

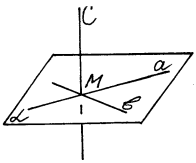
14. Если прямые a, b, c не лежат в одной плоскости, то a $\cap$ b определяет плоскость α,

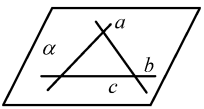
a $\cap$ c определяет плоскость γ,

b $\cap$ c определяет плоскость $\beta \Rightarrow$ всего 3 плоскости.



Если прямые a, b, c лежат в одной плоскости, то всего одна плоскость и существует.





15. а) все прямые a, b, c $\in \alpha$

б) a,b $\in \alpha$, c $\notin \alpha$

16. Дано: a|| b; a, b $\in \alpha$;

a $\cap$ c = A, b $\cap$ c = B

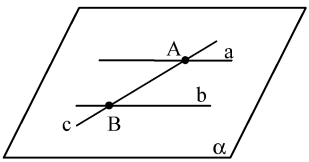
Доказать: c $\in \alpha$

Доказательство:

1) Т.к. a || b и a, b $\in \alpha$,

то A, B $\in \alpha$ (аксиома 2)

2) Т.к. A, B $\in \alpha$, то c $\in \alpha$, ч т.д.



17. Дано: M$\in$DB, N$\in$DC, Q$\in$AC, P$\in$AB, DM=MB, DN=NC, AQ=QC, AP=PB, AD = 12 см, BC = 14 см.

Найти: P_{MNQP} – ? Решение:

1) $\Delta ADB: MP = \frac{1}{2} AD$ (как средняя линия треугольника)

$\Delta ADC: NQ = \frac{1}{2} AD$ (как средняя линия треугольника)

$\Downarrow$

$MP = NQ = \frac{1}{2} AD = 6$ см

2) $\Delta ABC: PQ = \frac{1}{2} BC$ (как средняя линия треугольника)

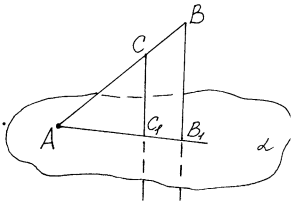
$\Delta BCD: MN = \frac{1}{2} BC$ (как средняя линия треугольника)

$\Downarrow$

$PQ = MN = \frac{1}{2} BC = 7$ см

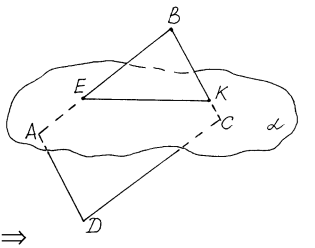
3) P_{MNQP}=MP+NQ+PQ+MN; P_{MNQP}=6+6+7+7=12+14=26 см

18. Дано: $C \in AB$, $A \in \alpha$, $B, C \notin \alpha$;
$CC_1 \cap \alpha = C_1$, $BB_1 \cap \alpha = B_1$,
$CC_1 || BB_1$. Найти: CC_1 – ? Решение:



а) Если C – середина AB; BB_1=7 см.
1) Т.к. $BB_1 || CC_1$,
то $\exists \beta : BB_1 || CC_1$ и $\beta \cap \alpha = C_1B_1$
Точка $A \in \alpha$ (усл.),
$A \in \beta$ (т.к. $A \in C_1B_1$) $\Rightarrow AB_1C_1 \in \beta$; Рассмотрим ΔABB_1 и ΔACC_1
$\angle A$ – общий, $\angle C = \angle B$ (как соответственные при $CC_1 || BB_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BB_1}{CC_1} = \dfrac{AB_1}{AC_1}$
по условию C – середина AB, значит $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{1}$
Отсюда $\dfrac{BB_1}{CC_1} = \dfrac{2}{1}$; $2CC_1 = BB_1 \Rightarrow CC_1 = \dfrac{1}{2}BB_1 = 3{,}5$ (см)
б) Если AC:CB=3:2, BB_1=20 см.Т.к. AC:CB=3:2, то AB:AC=5:3
Отсюда $\dfrac{BB_1}{CC_1} = \dfrac{5}{3}$; $CC_1 = \dfrac{3}{5}BB_1 \Rightarrow CC_1 = \dfrac{3}{5} \cdot 20 = 12$ (см)

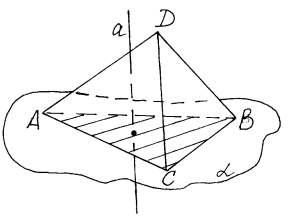
19. Дано: ABCD – параллелограмм;
$AB \cap \alpha = E$; $BC \cap \alpha = K$
Доказать: $AD \cap \alpha$, $DC \cap \alpha$



Доказательство:
1) $AB \cap \alpha = E$ (усл.),
AB || CD (определ. параллелограмма) $\Rightarrow$
$\Rightarrow CD \cap \alpha$ (по лемме: если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость).
2) Аналогично: $BC \cap \alpha = K$ (усл.), BC ||AD (опр.) $\Rightarrow DD \cap \alpha$ (по лемме)

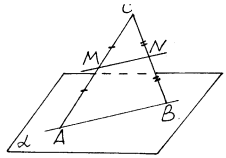
20. Если средняя линия трапеции лежит в некоторой плоскости α, то прямые, содержащие основания трапеции, параллельны этой плоскости (признак параллельности прямой и плоскости), но пересекать не могут, т.к. иначе по теореме сама средняя линия пересекала бы плоскость α.

21. Дано: $\Delta ABC \in \alpha$, $\Delta ABD \notin \alpha$, a || CD
Доказать: $a \cap (ABC)$, $a \cap (ABD)$



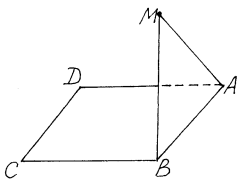
Доказательство:
1) $DC \cap (ABD) = D$, DC || a (усл.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow a \cap (ABD)$ (по лемме)
2) $DC \cap (ABC) = C$, DC || a (усл.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow a \cap (ABC)$ (по лемме)

22. Дано: A, B $\in \alpha$; C $\notin \alpha$; M $\in$ AC,AM=MC; N $\in$ BC, BN=NC; Доказать: MN || α



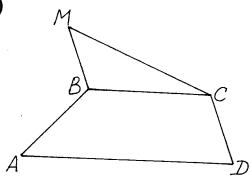
Доказательство: 1) A, B, C не лежат на одной прямой, значит, определяют некоторую плоскость β: A, B, C $\in \beta$.
2) A $\in \alpha$ (усл.), A $\in \beta$ (из 1) $\Rightarrow$ A – общая точка двух плоскостей
B $\in\alpha$ (усл.), B $\in \beta$ (из 1) $\Rightarrow$ B – общая точка двух плоскостей
Следовательно, $\alpha \cap \beta$ = AB.
3) ΔABC: NM – средняя линия (по определению), значит NM || AB.
4) Вывод: MN || AB, AB $\in\alpha \Rightarrow$ MN || α (признак параллельности прямой и плоскости), что требовалось доказать.

23. Дано: ABCD – прямоугольник; M$\notin$(ABC); Доказать: CD || (ABM)



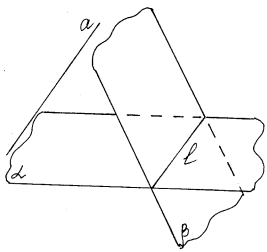
Доказательство:
1) Точки M, A, B не лежат на одной прямой, значит, $\exists\alpha$: A, B, M $\in \alpha$, т.е. (ABM)=α (аксиома 1).
2) CD || AB (свойство прямоугольника), AB $\in \alpha \Rightarrow$ CD || α, ч. т.д.

24. Дано: ABCD – трапеция; M $\notin$ (ABC) Доказать: AD || (BMC)



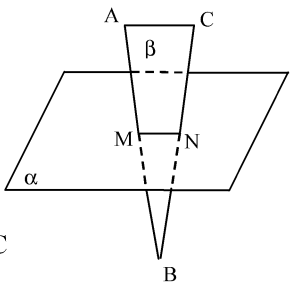
Доказательство:
1) B, C, M – не лежат на одной прямой, значит, $\exists\alpha$: B, C, M $\in\alpha$ (аксиома 1)
2) AD || BC (определение трапеции), BC $\in\alpha \Rightarrow$ AD || α, чтд.

25. Дано: $\alpha \cap \beta = l$; a $\notin \alpha$, a $\notin \beta$, a || l Доказать: a || α, a || β



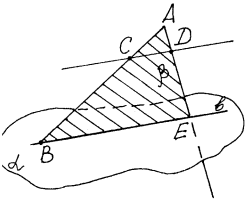
Доказательство:
1) Т.к. $\alpha \cap \beta = l$, то $l \in \alpha$ и $l \in \beta$
2) По условию a || l, (из 1) $l \in\alpha \Rightarrow$ a || α (признак параллельности прямой и плоскости)
3) По условию a || l, (из 1) $l\in\beta \Rightarrow$ a || β (признак), чтд

26. Дано: AC || α; (ABC)$\cap\alpha$=MN Доказать: ΔABC~ΔMBN



Доказательство:
1) ΔABC – определяет некоторую единственную плоскость β (по аксиоме 1), причем $\beta \cap \alpha$=MN.
2) AC || α (усл.), $\beta \cap \alpha$=MN $\Rightarrow$ MN || AC (следствие: если плоскость (β) проходит через прямую (AC), параллельную данной плоскости (α), то линия пересечения плоскостей (MN) параллельная прямой (AC).
3) Рассмотрим ΔABC и ΔMBN. $\angle$B – общий, $\angle$A=$\angle$M (как соответств. при MN || AC и секущей AB) $\Rightarrow$ ΔABC ~ ΔMBN (по двум углам)

27. Дано: $C \in AB$, $AB:BC=4:3$; $CD=12$ см, $CD \parallel \alpha$, $B \in \alpha$; Доказать: $AD \cap \alpha = E$



Найти: BE – ? Решение:

1) Точки A, C, D не лежат на одной прямой, значит, $\exists\beta$:
A, C, D$\in \beta$ (аксиома 1).

2) Т.к. $B \in \alpha$ (усл.), $B \in \beta$
(т.к. $B \in AC$, $AC \in \beta$) $\Rightarrow \alpha \cap \beta = b$, $B \in b$

3) Т.к. $CD \parallel \alpha$ (усл.), $\alpha \cap \beta = b \Rightarrow CD \parallel b$ (следствие из признака)

4) $AD \cap CD = D$, $CD \parallel b$ (из 3) $\Rightarrow AD \cap b = E$ (свойство параллельных прямых); отсюда: $AD \cap b = E$, $b \in \alpha \Rightarrow AD \cap \alpha = E$ чтд

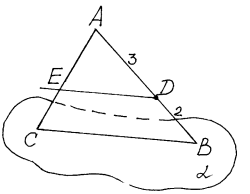
5) ΔBAE и ΔCAD, $\angle A$ – общий, $\angle B = \angle C$ (как соответственные при $BE \parallel CD$ и секущей AB) $\Rightarrow \Delta BAE \sim \Delta CAD$ (по двум углам)

$\Downarrow$

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD}$; Т.к. $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$, то $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{1}$;

Отсюда: $\frac{BE}{CD} = 4$; $BE = 4CD$; $BE = 48$

28. Дано: $BC \in \alpha$; $DE \parallel \alpha$; $D \in AB, \frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}$



$E \in AC, DE = 5$; Найти: BC – ?

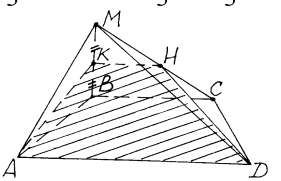
Решение: 1) Т.к. (AED) проходит через $DE \parallel \alpha$, то $(AED) \cap \alpha = BC$ и $ED \parallel BC$.

2) Рассмотрим ΔACB и ΔAED

$\angle A$ – общий, $\angle C = \angle E$ (при $ED \parallel CB$ и секущей AC) $\Rightarrow \Delta ACB \sim \Delta AED$

(по двум углам)$\Rightarrow \frac{CB}{ED} = \frac{AB}{AD} = \frac{5}{3}$; $BC = \frac{5}{3}ED$; $BC = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ см

29. Дано: ABCD – трапеция
$M \notin (ABC)$, $BC = 12$ см
$K \in BM$, $BK = KM$
Доказать: $MC \cap (ADK) = H$
Найти: KH – ?



1) Т.к. A, K, D не лежат на одной прямой, то определяют единственную плоскость β: $A, K, D \in \beta$ (по аксиоме 1) (т.е. $(ADK) = \beta$)

2) $AD \in \beta$, $AD \parallel BC$ (определение трапеции) $\Rightarrow BC \parallel \beta$ (признак)

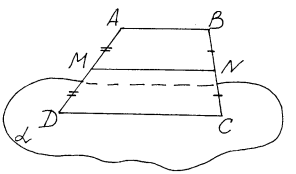
3) $MC \cap BC = C$, $BC \parallel \beta \Rightarrow MC \cap \beta = H$, причем $KH \parallel BC$

4) $\Delta KMH \sim \Delta BMC$ (по двум углам)

$\Downarrow$

$\frac{KH}{BC} = \frac{MK}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow KH = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см)

30. Дано: ABCD – трапеция;
$C \in \alpha$, $AB \parallel \alpha$; Доказать:
а) $CD \in \alpha$; б) MN – средняя линия параллельна α.



Доказательство:

1) Плоскости (ABCD) и α имеют одну общую точку C, значит, $(ABC) \cap \alpha = a$: $C \in a$.

С другой стороны, ABCD – трапеция и AB || DC (по определению).

2) Докажем, что прямые a и DC совпадают.

а) Пусть a и DC не совпадают, т.е. это две различные прямые, тогда,

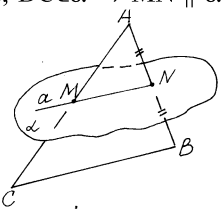
б) имеем: AB || a (из следствия признака параллельности прямой и плоскости). AB || DC (по определению трапеции)

Значит, через точку C проходят две различные прямые a и DC, параллельные AB,

3) что противоречит аксиоме параллельных. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной и только одну.

4) Вывод: a и DC совпадают, значит $CD \in \alpha$.

5) $MN \parallel \alpha$, т.к. $MN \parallel DC$ (по определению), $DC \in \alpha \Rightarrow MN \parallel \alpha$ (по определению), чтд



31. Дано: ΔABC, $BC \parallel \alpha$, $N \in AB$,

$AN=NB$, $N \in \alpha$, $M \in AC$

Доказать: $M \in \alpha$, $AM=MC$

Доказательство:

1) $N \in (ABC)$, $N \in \alpha \Rightarrow (ABC) \cap \alpha = a$, $N \in a$

2) Т.к. $BC \parallel \alpha$, $(ABC) \cap \alpha = a \Rightarrow a \parallel BC$, значит, прямая a, проходящая через середину AB параллельно BC, лежит на средней линии ΔABC (по определению) $\Rightarrow AC \cap a = M$. $M \in \alpha$ и $AM=MC$, чтд

33. а) Возможны два случая

$\alpha \cap \beta = AA_1$

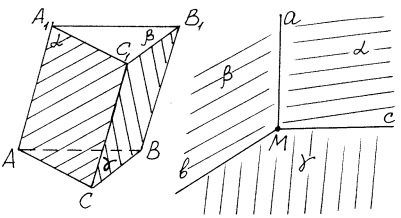
$\alpha \cap \gamma = CC_1$

$\beta \cap \gamma = BB_1$

б) $\alpha \cap \beta = a$

$\alpha \cap \gamma = c$

$\beta \cap \gamma = b$



Рассмотрим взаимное расположение прямой AA_1 – результат пересечения двух плоскостей (α и β) и плоскости γ.

Прямая и плоскость в пространстве могут быть расположены относительно друг друга следующим образом:

1) прямая лежит в плоскости; 2) прямая пересекает плоскость

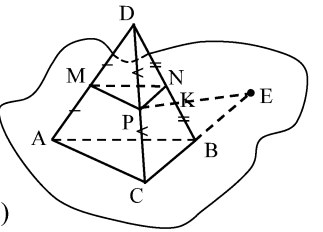
3) прямая параллельна плоскости

Пусть прямая AA_1 лежит в плоскости γ, тогда все точки прямой AA_1 лежат в плоскости γ, т.к. $AA_1 = \alpha \cap \beta$, то: $\alpha \cap \gamma = AA_1$;

$\beta \cap \gamma = AA_1$, что противоречит условию, что α, β, γ не проходят через одну прямую.

Значит, наше предположение неверно, а верно то, что $AA_1 \parallel \gamma$ или $AA_1 \cap \gamma$, чтд

34. Дано: $D \notin (ABC)$; $M \in AD$, $AM=MD$; $N \in DB$, $DN=NB$; $P \in DC$, $DP=PC$; $K \in BN$



Выяснить взаимное расположение.

а) $ND \cap AB=B$; б) $PK \cap BC=E$, т.к. лежат в одной плоскости (BCD).

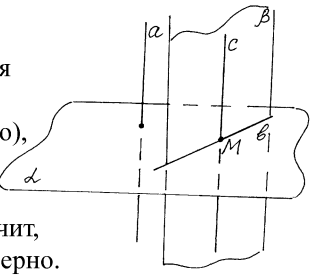
в) $MN \parallel AB$ (как средняя линия ΔABD)

г) $MP \parallel AC$ (как средняя линия ΔADC)

д) $KN \in (ABD)$, $AC \in (ACD) \Rightarrow KN, AC$ – скрещивающиеся

е) $MD \in (ADC)$, $BC \in (ABC) \Rightarrow MD$ и BC – скрещивающиеся

35. Дано: $M \notin a$, $b \cap c=M$



Доказать: $b \times a$; Доказательство:

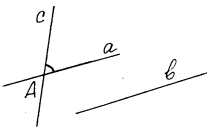
1) Пусть a и b – не скрещивающиеся прямые, т.е. $a \parallel b$ или $a \cap b$.

2) Если $a \parallel b$, $a\ b \cap c=M$ (по условию), то $a \cap c$ по свойству параллельных прямых, что противоречит условию, что a и c не имеют общих точек, значит, данное предположение, что $a \parallel b$ неверно.

3) Если $a \cap b$, то уже противоречит условию, что a и b не имеют общих точек.

4) Вывод: наше предположение о том, что a и b не являются скрещивающимися прямыми, неверно, а верно то, чтд

36. Дано: $a \cap c=A$; c не $\cap b$, $b \parallel a$;



Доказать: $c \times b$; Доказательство:

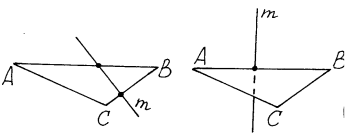
1) Пусть c и b не являются скрещивающимися прямыми, тогда они либо параллельны, либо пересекаются.

2) Если $b \parallel c$, то имеем: $A \in a$, $a \parallel b$ (по условию); $A \in c$, $c \parallel b \Rightarrow$
$\Rightarrow a \parallel c$, что противоречит условию $a \cap c=A$

3) Если $b \cap c$, то это противоречит условию, что b не $\cap$ c.

4) Вывод: наше предположение неверно, а верно, что $c \times b$, чтд

37. а) Если $m \in (ABC)$, m не $\cap$ AC, то $m \cap BC$.

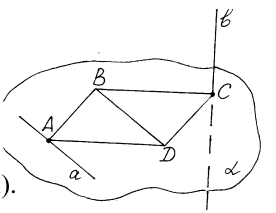


б) Если $m \notin (ABC)$, то $m \times BC$.

38. Дано: ABCD – ромб, $A \in a$, $a \parallel BD$, $C \in b$, $b \notin (ABC)$

Доказать: а) $a \cap CD$; б) $a \times b$;

Доказательство:



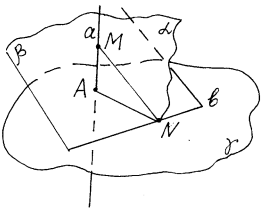
1) Т.к. $A \in (ABC)$, $A \in a$, $a \parallel BD \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in (ABC)$ (по определению)

2) $CD \cap BD=D$, $a \parallel BD$ (по условию) $\Rightarrow$
$\Rightarrow CD \cap a$ (свойство параллельных прямых).

3) Докажем, что $a \times b$.
Пусть это не так, т.е. $a || b$ или $a \cap b$. Если $a || b$, то они лежат в одной плоскости, т.е. $b \in (ABC)$, что противоречит условию $b \notin (ABC)$.
Если $a \cap b$, то они тоже лежат в одной плоскости и $b \in (ABC)$ – опять противоречие условию. Значит, наше предположение неверно, а верно, что $a \times b$, чтд

39. Дано: $AB \times CD$; Доказать: $AD \times BC$
Доказательство: 1) Пусть AD и BC нескрещивающиеся прямые.
2) Тогда $AD \parallel BC$ или $AD \cap BC$, т.е. получаем, что AD и BC лежат в одной плоскости, значит, $AB \parallel CD$ или $AB \cap CD$,
3) что противоречит условию $AB \times CD$.
4) Вывод: наше предположение неверно, а верно то, что AD и BC скрещиваются, чтд.

40. Дано: $a \times b$, $M \in a$, $N \in b$;
$M, b \in \beta$; $N, a \in \alpha$
1) Лежит ли b в плоскости α?
2) $\alpha \cap \beta$ – ?

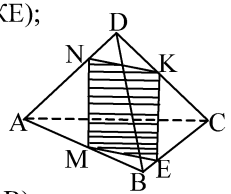


1) Прямая b и плоскость α пересекаются в точке N.
Если бы $b \in \alpha$, то $a \parallel b$ или $a \cap b$, что противоречит условию $a \times b$.
2) $M \in \alpha$, т.к. $a \in \alpha$, $M \in \beta$ (по условию) $\Rightarrow M \in$ обеим плоскостям.
$N \in \alpha$ (по условию), $N \in \beta$, т.к. $b \in \beta \Rightarrow N \in$ обеим плоскостям, значит, $\alpha \cap \beta = MN$, чтд.

41. Если a и b скрещивающиеся прямые, то они не могут быть одновременно параллельными третьей прямой, т.к. по определению параллельные прямые лежат в одной плоскости, а у нас a и b лежат в разных плоскостях.

42. ABCD – параллелограмм; ABEK – трапеция; $EK \notin (ABC)$
а) $CD \parallel EK$, т.к. $DC \parallel AB$ (по определению); $AB \parallel KE$ (по определению) $\Rightarrow DC \parallel EK$ (свойство параллельных прямых)
б) Т.к. в трапецию ABEK можно вписать окружность, то EB+AK= = AB+KE (свойство). Значит, $P_{ABEK} = 2(AB+KE)$;
$P_{ABEK}=2(22,5+27,5)=100$ см.

43. Дано: ABCD – пространственный четырехугольник
M, N, K, E – середины сторон ABCD.
Доказать: MNKE – параллелограмм



1) ΔADB: $MN \parallel BD$ (как средняя линия ΔADB)
ΔCDB: $KE \parallel BD$ (как средняя линия $\Delta CDB \Rightarrow$
$\Rightarrow$ 2) $MN \parallel KE$ (свойство параллельных прямых)
ΔACD: $NK \parallel AC$ (как средняя линия ΔACD)
ΔABC: $ME \parallel AC$ (как средняя линия ΔABC)$\Rightarrow$
$\Rightarrow NK \parallel ME$ (свойство параллельных прямых)
3) Вывод: $MN \parallel KE$; $NK \parallel ME$
MNKE – параллелограмм (по признаку)

44. Дано: OB || CD; AO $\bar{\cdot}$ CD

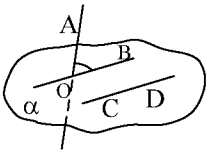
Найти: (OA$^\wedge$ CD) – ?; Решение:

(OA$^\wedge$CD)=(OA$^\wedge$OB) (т.к. OB || CD)

Если ∠AOB=40°, то(OA$^\wedge$CD)= 40°

∠AOB=135° (OA$^\wedge$CD)= 45°

∠AOB=90° (OA$^\wedge$CD)=90°



45. Дано: ABCD – параллелограмм; a || BC, a ∉ (ABC)

Доказать: a×CD; Найти: (a$^\wedge$CD) – ? Доказательство:

1) Т.к. a || BC, то ∃α: a, BC ∈ α

2) CD∩α=C, a∈α ⇒ CD×a (по признаку скрещивающихся прямых)

3) Т.к. ∠A=50° (по условию), то (a$^\wedge$CD)=(BC$^\wedge$CD)=50°

4) Т.к. ∠B=121° (по условию), то (a$^\wedge$CD)=(BC$^\wedge$CD)=180° –121° = 59°

46. Дано: ABCD – ромб; m || BD,

m ∉ (ABC), ∠ABC=128°

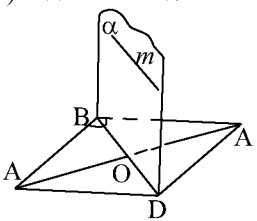
Доказать: m×AC; m×AD

Доказательство: 1) BD || m (по условию) ⇒

⇒ ∃α: m, BD∈ α

AC∩BD=O, т.е. m∈ α, AC∩ α=0 ⇒ m×AC

Аналогично m∈ α, AD ∩ α=D ⇒ m×AD



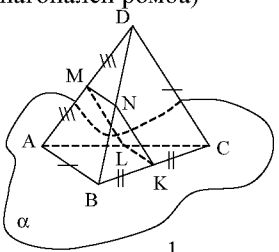
2) (m$^\wedge$AC) = (BD$^\wedge$AC) = 90° (свойство диагоналей ромба)

(m$^\wedge$AD) = (BD$^\wedge$AD) = 64° (свойство диагоналей ромба)

47. Дано: ABCD – пространственный четырехугольник AB = CD,

Доказать, что ∠NKM между DC и MK равен ∠LKM между MK и AB

1) Рассмотрим четырехугольник MNKL: в ΔABC LK || AB,



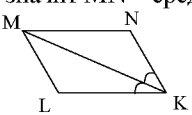
BK = KC, значит KL – средняя линия ΔABC. LK = $\frac{1}{2}$ AB;

В ΔBDC KN || DC, BK = KC, значит KN – средняя линия ΔBDC;

В ΔADB AM = MD, BN = ND, значит MN – средняя линия ΔADB;

MN || AB, MN = $\frac{1}{2}$ AB;

В ΔADC AM = MD, AL = LC,



значит ML – средняя линия ΔADC; ML || DC; ML = $\frac{1}{2}$ DC;

2) KL = $\frac{1}{2}$ AB = MN; KN = $\frac{1}{2}$ DC = ML; AB = DC (по усл.) ⇒

LK = MN = KN= ML; ML || NK и MN || LK ⇒ MNKL – ромб,

MK – диагональ, являющаяся биссектрисой ⇒ ∠NKM = ∠LKM

49. Дано: m ∩ α = B; Существует ли β: m ∈ β и β || α – ?

Док–во:1) Пусть ∃β: m ∈ β и β || α; 2) Тогда B ∈ α, т.к. m ∩ α = B

B ∈ β, т.к. B ∈ m, m ∈ β ⇒ B принадлежит обеим плоскостям,

значит α ∩ β, что противоречит нашему предположению

3) Вывод: β – не существует.

50. Дано: $\alpha \parallel \beta$; $m \in \alpha$

Доказать: $m \parallel \beta$

Доказательство:

1) Возьмем точку $M \in \beta$.

Т.к. $M \notin m$, то $\exists \gamma$: m, $M \in \gamma$

Отсюда $\gamma \cap \alpha = m$, $\gamma \cap \beta = a$, где $M \in a$.

По свойству параллельных плоскостей $m \parallel a$.

2) $m \parallel a$ (из 1), $a \in \beta \Rightarrow m \parallel \beta$

(признак параллельности прямой и плоскости), чтд.

51. Дано: $m \cap n \in \alpha$; $m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$; Доказать: $\alpha \parallel \beta$; Доказательство:

1) Через m проведем плоскость γ: $\gamma \cap \beta = a$, тогда $a \mid\mid m$ (свойство)

Аналогично, через n проведем плоскость γ_1: $\gamma_1 \cap \beta = b$, тогда $b \parallel n$ (свойство: если через прямую, параллельную данной плоскости, проходит плоскость, пересекающая данную, то линия пересечения плоскостей параллельная данной прямой).

3) Имеем: $a \parallel m$, $b \parallel n$, $m \cap n \in \alpha$, $a, b \in \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ (по признаку).

52. Дано: ΔABC; $AB \parallel \alpha$, $AC \parallel \alpha$

Доказать: $BC \parallel \alpha$; Доказательство:

1) ΔABC – определяет плоскость β: $\Delta ABC \in \beta$, тогда по результатам предыдущей задачи, имеем, что $\beta \parallel \alpha$.

2) Через BC проведем плоскость γ: $\alpha \cap \gamma$; $\beta \cap \gamma$,

тогда $\alpha \cap \gamma = B_1C_1$, $\beta \cap \gamma = BC$ и $BC \parallel B_1C_1$

3) Т.к. $BC \parallel B_1C_1$, $B_1C_1 \in \alpha \Rightarrow BC \parallel \alpha$ (признак), чтд

53. Дано: $A_1A_2 \cap B_1B_2 \cap C_1C_2 = O$;

O – общая середина

Доказать: $(A_1B_1C_1) \parallel (A_2B_2C_2)$

Доказательство:

1) Рассмотрим четырехугольник $B_1C_2B_2C_1$:

$C_1O = OC_2$ (по условию);

$B_1O = OB_2$ (по условию)$\Rightarrow$

$\Rightarrow B_1C_2B_2C_1$ – параллелограмм (признак) $\Rightarrow C_1B_1 \mid\mid C_2B_2$

2) Рассмотрим четырехугольник $A_1B_1A_2B_2$:

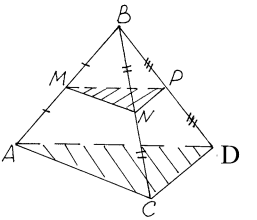
$A_1O = OA_2$ (по условию); $B_1O = OB_2$ (по условию) $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1B_1A_2B_2$ – параллелограмм (признак) $\Rightarrow A_1B_1 \parallel A_2B_2$

3) $A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1 \Rightarrow \exists \alpha$: $A_1B_1C_1 \in \alpha$; $A_2B_2 \cap B_2C_2 = B_2 \Rightarrow \exists \beta$: $A_2B_2C_2 \in \beta$

4) Вывод: $\left.\begin{array}{l} C_1B_1, A_1B_1 \in \alpha \\ C_2B_2, A_2B_2 \in \beta \\ C_1B_1 \parallel C_2B_2 \\ A_1B_1 \parallel A_2B_2 \end{array}\right| \rightarrow \alpha \parallel \beta$ (признак), т.е. $(A_1B_1C_1) \mid\mid (A_2B_2C_2)$

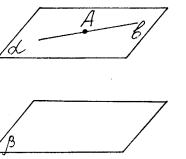
54. Дано: ΔADC; $B \notin (ADC)$;
$M \in BA$, $BM=MA$; $N \in BC$, $BN=NC$;
$P \in BD$, $BP=PD$; $S_{ABC}=48$ см^2
Доказать: $(MNP) \parallel (ADC)$; Найти: S_{MPN} – ?
Решение: 1) $MN \parallel AC$; $NP \parallel CD$; $MP \parallel AD$
(как средние линии ΔABC, ΔCBD и ΔABD)



$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AC \\ NP \parallel CD \\ MN, NP \in MNP \\ AC, CD \in (ADC) \end{array}\right| \to (MNP) \parallel (ADC) \text{ (призн. параллельн. плоскостей)}$$

2) $\Delta ADC \sim \Delta MPN$ (по 3 сторонам с $k = \frac{1}{2}$)

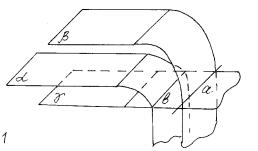
$$\frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta MNP}} = k^2 \Rightarrow S_{\Delta MNP} = 12 \text{ см}^2$$



56. Дано: $\alpha \parallel \beta$; $A \in \alpha$; $A \in b$, $b \parallel \beta$
Доказать: $b \in \alpha$
Доказательство:
1) Пусть $b \notin \alpha$, т.е. или $b \parallel \alpha$ или $b \cap \alpha$.
2) Тогда, если $b \parallel \alpha$, то они не имеют общих точек, что противоречит условию $A \in b$ и $A \in \alpha$; если $b \cap \alpha$, то $b \cap \beta$, т.к. $\alpha \parallel \beta$, что противоречит условию $b \parallel \beta$.
3) Значит, наше предположение неверно, а верно $b \in \alpha$, чтд

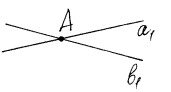
57. Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel \alpha$; Доказать: $a \parallel \beta$ или $a \in \beta$
Доказательство:
1) Пусть $a \cap \beta$, 2) тогда $a \cap \alpha$, т.к. $\alpha \parallel \beta$ (свойство),
3) что противоречит условию $a \parallel \alpha$.
4) Вывод: наше предположение неверно, а верно то ч. т. д.

60. Дано: $\alpha \parallel \gamma$, $\beta \parallel \gamma$
Доказать: $\alpha \parallel \beta$; Доказательство:
1) Пусть α не параллельна β,
т.е. $\alpha \cap \beta = a$

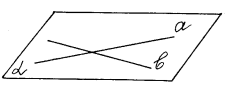


2) Тогда имеем: $\left.\begin{array}{l} \beta \parallel \gamma \\ \alpha \cap \beta \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \cap \gamma = b$ и $a \parallel b$,
3) что противоречит условию $\alpha \parallel \gamma$.
4) Вывод: Наше предположение неверно, а верно то, чтд.

61. Дано: $a \cap b \in \alpha$; $A \notin \alpha$
Доказать: 1) $\exists \beta$: $A \in \beta$, $\beta \parallel \alpha$
2) β – единственная



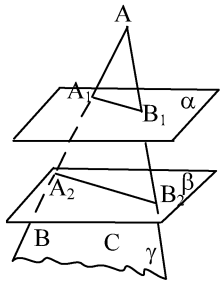
Доказательство:
1) Проведем через точку
A прямую $a_1 \parallel a$; $b_1 \parallel b$
(это возможно по аксиоме параллельных прямых)



2) $a_1 \cap b_1 = A \Rightarrow \exists \beta$: $\beta \parallel \alpha$ – единственная, чтд

63. Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle BAC$; $AB \cap \alpha = A_1$, $AB \cap \beta = A_2$; $AC \cap \alpha = B_1$, $AC \cap \beta = B_2$

Найти: а) AA_2, AB_2; б) A_2B_2, AA_2



а) Если $A_1A_2 = 2A_1A$; $A_1A_2 = 12$ см, $AB_1 = 5$ см.

Точки A, B, C не лежат на одной прямой, поэтому $\exists\, \gamma$: A, B, C $\in \gamma$.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma \cap \alpha = A_1B_1 \\ \gamma \cap \beta = A_2B_2\end{array}\right| \to A_1B_1 \| A_2B_2; \quad \Delta AA_1B_1 \sim \Delta A_2AB_2 \text{ (по двум углам)}$$

$$\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{AB_1}{AB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}; \; AA_2 = AA_1 + A_1A_2; \; AA_2 = AA_1 + 2AA_1$$

$$AA_2 = 3AA_1 \Rightarrow \frac{AA_1}{AA_2} = \frac{1}{3}$$

$$\textit{Отсюда}: \frac{AB_1}{AB_2} = \frac{1}{3}; \; AB_2 = 3AB_1 = 3 \cdot 5 = 15; \; \frac{A_1A}{A_2A} = \frac{1}{3}; \; \frac{A_1A}{A_1A + 12} = \frac{1}{3}$$

$$3A_1A = A_1A + 12; \; 2A_1A = 12 \Rightarrow A_1A = 6$$

Отсюда: $A_2A = 6 + 12 = 18$ см Ответ: 15 см, 18 см.

б) Если $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \frac{3}{2}A_1A_2$

$$AA_2 = AA_1 + A_1A_2; \; \frac{3}{2}A_1A_2 = AA_1 + A_1A_2; \; AA_1 = \frac{1}{2}A_1A_2$$

$$24 = \frac{1}{2}A_1A_2 \Rightarrow A_1A_2 = 48$$

Отсюда: $AA_2 = 24 + 48 = 72$ см

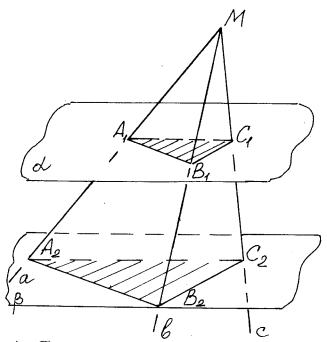
$$\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}; \; \frac{24}{72} = \frac{18}{A_2B_2}; \; A_2B_2 = \frac{18 \cdot 72}{24} = 54 \text{ см}$$ Ответ: 72 см, 54см.

64. Дано: $a \cap b \cap c = M$; $\alpha \parallel \beta$;

$a \cap \alpha = A_1$, $b \cap \alpha = B_1$, $c \cap \alpha = C_1$;

$a \cap \beta = A_2$, $b \cap \beta = B_2$, $c \cap \beta = C_2$

Доказать: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$



Доказательство:

1) $a \cap b = M \Rightarrow \exists\, \gamma$: a, b $\in \gamma$ и

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \gamma = A_1B_1 \\ \beta \cap \gamma = A_2B_2\end{array}\right| \to A_1B_1 \| A_2B_2$$

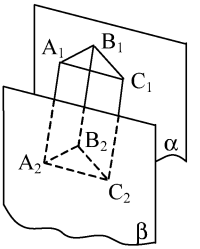
(свойство)

2) Аналогично рассуждая, получим, что $B_1C_1 \| B_2C_2$ и $A_1C_1 \| A_2C_2$

Отсюда: $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$; $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2$; как углы с соответственносонаправленными сторонами.

Таким образом, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ по двум углам, чтд

65. Дано: $\alpha \parallel \beta$; $A_1B_1C_1 \in \alpha$, $\angle A_2B_2C_2 \in \beta$, $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$.



а) Определить вид четырехугольников $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$ и $A_1C_1C_2A_2$

б) Доказать: $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$

а) Т.к. $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$ и $A_1A_2=B_1B_2=C_1C_2$ как отрезки, заключенные между параллельными плоскостями.

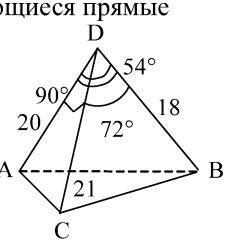
Значит, $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$ и $A_1C_1C_2A_2$ – параллелограммы.

б) Т.к. $A_1B_1=A_2B_2$; $B_1C_1=B_2C_2$; $A_1C_1=A_2C_2$ (из пункта (а)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$ (по 3 сторонам), чтд

66. AD и CB; BD и AC, DC и AB – скрещивающиеся прямые

67. Дано: ABCD – тетраэдр;



$\angle ADB=54°$, $\angle BDC=72°$; $\angle CDA=90°$,

DA=20 см; BD=18 см, DC=21 см

Найти: а) AB, AC, BC; б) $S_{бок.гр.}$

Решение: 1) ΔACD: $\angle D=90°$, AD=20; DC=21

$AC^2=AD^2=CD^2$; $AC^2=21^2+20^2$;

$AC^2=441+400$; AC=29 см

2) ΔBDC: $BC^2 = CD^2+BD^2 - 2CD \cdot BD \cdot \cos 72°$

$BC^2=21^2+18^2-2 \cdot 21 \cdot 18 \cdot 0{,}3090$; $BC^2=441+324-233{,}604$;

$BC^2=531{,}396$; $BC \approx 23{,}05$ см

3) ΔABD: $AB^2=AD^2+BD^2-2AD \cdot BD \cdot \cos 54°$

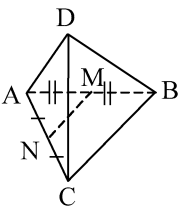
$AB^2=400+324-2 \cdot 20 \cdot 18 \cdot 0{,}5878$; $AB^2=299{,}788$; $AB \approx 17{,}31$ см

$S_{ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC$; $S_{ADC} = \frac{1}{2} 20 \cdot 21 = 210$; $S_{BDC} = \frac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \sin 72^0$

$S_{BDC} = \frac{1}{2} 18 \cdot 21 \cdot 0{,}9511 \approx 179{,}8$; $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot DB \cdot \sin 54^0$;

$S_{ABD} = \frac{1}{2} 20 \cdot 18 \cdot 0{,}8090 \approx 145{,}6$

68. Дано: ABCD – тетраэдр; $M \in AB$, AM=MB; $N \in AC$, AN=NC



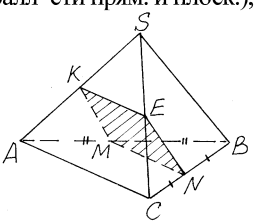
Доказать: $MN \parallel (BCD)$

Доказательство:

1) Т.к. MN – средняя линия ΔABC, то $MN \parallel BC$

2) $\left.\begin{matrix} MN \parallel BC \\ BC \in (BCD) \end{matrix}\right| \rightarrow MN \parallel (BCD)$ (призн. паралл–сти прям. и плоск.), чтд

69. Дано: ABCS – тетраэдр;



$M \in AB$, AM=MB; $N \in BC$, BN=NC;

$SB \parallel (MNE)$

Доказать: $(MNE) \cap (CBS) = EN$

(MNE)∩(ABS)=MK; и EN || MK

1) Т.к. $\left.\begin{matrix} SB \parallel (MNE) \\ SB \in (BCS) \end{matrix}\right| \to (SBC) \cap (MNE) = EN$; EN || BS

(свойство параллельности прямой и плоскости)

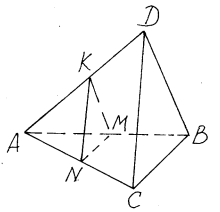
2) Аналогично: $\left.\begin{matrix} SB \parallel (MNE) \\ SB \in (ABS) \end{matrix}\right| \to (ASB) \cap (MNE) = KM$

и KM || BS (свойство параллельности прямой и плоскости)

3) $\left.\begin{matrix} KM \parallel BS \\ EN \parallel BS \end{matrix}\right| \to EN \parallel MK$ (свойство параллельных прямых)

70. Дано: ABCD – тетраэдр; M∈ AB, AM=MB; N∈ AC, AN=NC; K∈ AD, AK=KD

Доказать: (MNK) || (BCD)

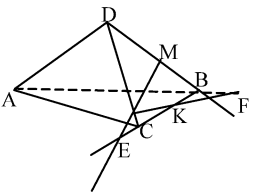


1) KN – средняя линия ΔADC, значит, NK || DC

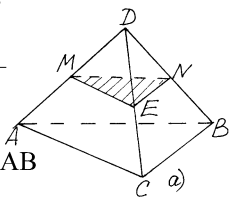
KM – средняя линия ΔABD, значит, KM || BD ⇒ (MNK) || (CBD) по признаку параллельности плоскостей

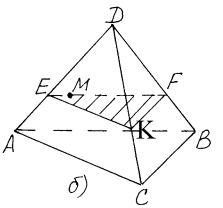
71. а) MN∩(ABC)=E

б) KN∩(ABD)=F



72. а) Т.к. плоскость должна быть параллельна (ABC), то построим MN || AB и ME || AC, соединим EN отрезком. (MNE) – искомое сечение.





б) Через (•) M построим прямую a || AB a∩AD=E, a∩BD=F, затем EK || AC соединим KF отрезком. (EFK) – искомое сечение.

73. Дано: ABCD – тетраэдр; M∈ AB, AM=MB; N∈ BC, BN=NC; P∈ CD, CP=PD; AC=10 см, DB=12 см. Доказать: (MNP)∩AD=K и K – середина AD. Найти: P_{MNPK} – ?; Доказательство:

1) $NP = \frac{1}{2} DB$ и NP || DB (как средняя линия ΔBCD)

$MN = \frac{1}{2} AC$ и MN || AC (как средняя линия ΔABC)

$\left.\begin{matrix} (MNP) \cap (ACD) = KP \\ MN \parallel AC \end{matrix}\right| \to KP \parallel MN$; (по теореме: если плоскость проходит через прямую, параллельную данной плоскости, то линия пересечения плоскостей параллельна прямой).

2) Т.к. MN || AC (из 1); KP || MN (из 1) ⇒

$\Rightarrow$ AC || KP (свойство параллельных прямых)

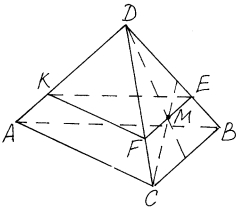
3) Т.к. AC || KP, P – середина DC $\rightarrow$ по определению средней линии K – середина AD.

4) $P_{MNPK} = 2(MN + PN) = 2\left(\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}DB\right) = AC + DB = 10 + 12 = 22$ см

74. Дано: ABCD – тетраэдр; M – точка пересечения медиан ΔBCD

Доказать: ΔFEK – искомое сечение

ΔFEK ~ ΔABC; Найти: $\frac{S_{FEK}}{S_{ABC}} - ?$



Решение: Т.к. сечение должно быть параллельно (ABC), то через M проведем FE || BC, затем E – KE || AB, соединим KF отрезком. ΔKFE – искомое сечение, параллельное (ABC).

Т.к. M – точка пересечения медиан, то $\frac{DF}{DC} = \frac{2}{3}; \frac{DE}{DB} = \frac{FE}{CB} = \frac{2}{3}$

Отсюда: ΔFEK ~ ΔABC (по трем сторонам) $\frac{S_{\Delta FEK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4}{9}$

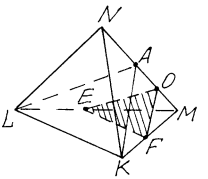
75. б) FO || AK и $FO = \frac{1}{2}KA$

(как средняя линия ΔMAK)

OE || A*L* и $OE = \frac{1}{2}AK$

(как средняя линия ΔMA*L*)

(FOE) || (KA*L*) (по признаку)



и ΔFOE ~ ΔKA*L* (с $k = \frac{1}{2}$); $\frac{S_{\Delta FOE}}{S_{\Delta KAL}} = k^2 = \frac{1}{4}; S_{FOE} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6$

76. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед; Доказать: $AC \parallel A_1C_1$, $BD \parallel B_1D_1$; Доказательство: Т.к. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, то по определению и свойствам параллелепипеда $AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1 \parallel DD_1$; $AA_1=CC_1=BB_1=DD_1$, тогда AA_1C_1C – параллелограмм (по признаку $AA_1 \parallel CC_1$ и $AA_1=CC_1$);

Значит, $AC=A_1C_1$ и $AC \parallel A_1C_1$. Аналогично, $BD \parallel B_1D_1$.

77. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Сумма всех ребер 120 см; $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}; \frac{BC}{B_1B} = \frac{5}{6}$; Найти: все ребра; Решение:

$\sum = (AB + BC)4 + 4AA_1$; $120 = 4(AB + BC + AA_1)$

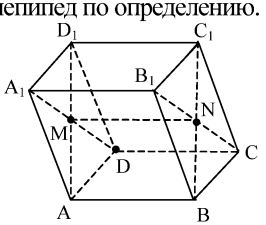
$AB + BC + AA_1 = 30$; $AB = \frac{4}{5}BC$, $BB_1 = \frac{6}{5}BC$ (*усл.*)

$\frac{4}{5}BC + BC + \frac{6}{5}BC = 30$; $3BC = 30$; $BC = 10$ *см*

Ответ : $AB = \frac{4}{5} \cdot 10 = 8$ *см*; $BB_1 = \frac{6}{5} \cdot 10 = 12$ *см* BC=10*см*;

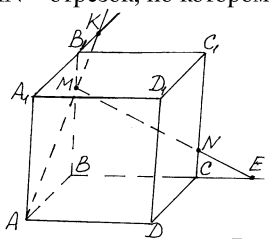
78. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед; $AM=CN=A_1M_1=C_1N_1$
Доказать: $MBNDM_1B_1N_1D_1$ – параллелепипед; Доказательство:
1) Т.к. $A_1B_1=AB=DC=D_1C_1$; (из определ. параллелепипеда), то $M_1B_1=MB=D_1N_1=DN$; Т.к. $M_1B_1=A_1B_1-A_1M_1$ $D_1N_1=D_1C_1-N_1C_1$
$MB=AB-AM$; $DN=DC-NC$; $AM=A_1M_1$, $NC=N_1C_1$ (по условию)
Значит, $M_1B_1N_1D_1$ и $MBND$ – равные параллелограммы, лежащие в параллельных плоскостях.
2) $MM_1=BB_1=NN_1=DD_1$ как отр., заключенные между || плоскостями. Значит, M_1B_1BM, BB_1N_1N, MM_1D_1D, D_1N_1ND – параллелограммы. Следовательно, $MBNDM_1B_1N_1D_1$ – параллелепипед по определению.

80. а) сечение пл. ABC_1D_1



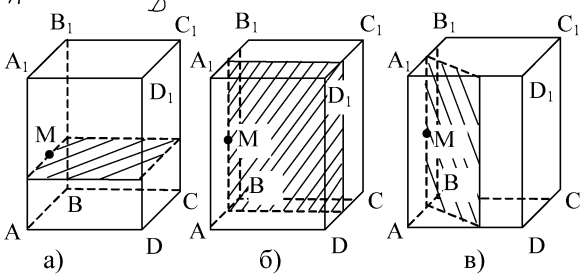
Пл. BB_1C_1C || AA_1D_1D (по свойству параллелепипеда) $\Rightarrow$ BC_1 || пл. AA_1D_1D; точка A – общая для пл. ABC_1 и пл. AA_1D_1D – плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку A и || BC_1. Плоскости граней AA_1B_1B и D_1DC_1C пересечены пл. ABC_1D_1, значит их линии пересечения параллельны, AB || || C_1D_1. Плоскость пересекает грань AA_1D_1D по прямой AD_1; AD_1 || || $BC_1 \Rightarrow ABC_1D_1$ – парал–м.
б) сечение пл. DCB_1; точка D – общая для пл. DCB_1 и пл. AA_1D_1D – плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку D и || CB_1. В плоскости грани AA_1D_1D проводим DA_1; DA_1 || $CB_1 \Rightarrow$ DCB_1A_1 – параллелограмм.
в) MN – отрезок, по которому пересекаются построенные сечения

81.

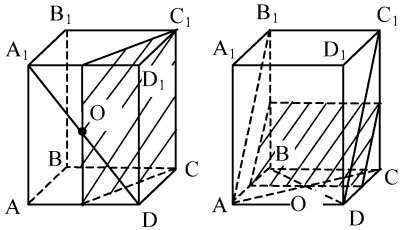


$MN \cap (ABC)=E$
$AM \cap (A_1B_1C_1)=K$

82



83.

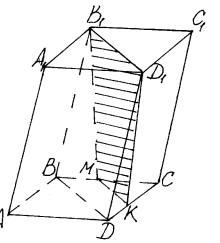


84. B_1, D_1, K, M – трапеция – искомое сечение.

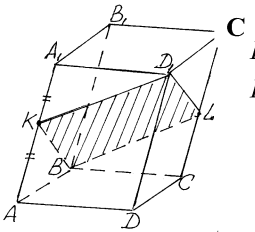
$MK \parallel B_1D_1$

$\underline{D_1K \text{ не}} \parallel \underline{B_1M}$

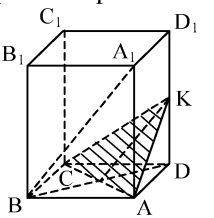
B_1D_1KM – трапеция



85



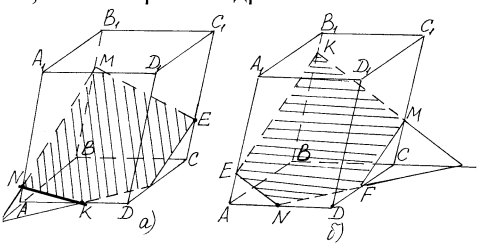
$$\left.\begin{array}{l} KD_1 \parallel BL \\ KB \parallel D_1L \end{array}\right| \to KBLD_1 \text{ – параллелограмм}$$



86. Если ABCD – ромб и $\angle ABB_1 = \angle CBB_1 = 90°$, то $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед.

Из $\Delta AKD = \Delta CDK$ (по катетам KD – общая, AD=DC) следует: AK=KC, значит, ΔAKC – равнобедренный

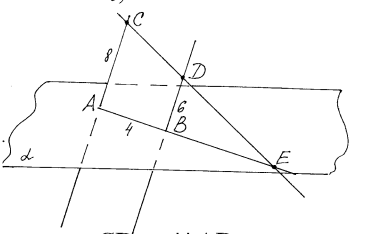
87



88. Дано: AC || BD; $AC \cap \alpha = A$, $BD \cap \alpha = B$; AC=8 см; BD=6 см; AB=4 см; Доказать: $CD \cap \alpha = E$

Найти: BE; Доказательство:

1) Пусть CD не $\cap\ \alpha$, тогда CD || α.



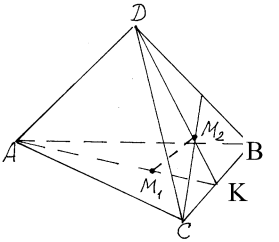
2) Значит, $(ABC) \cap \alpha = AB$ и CD || AB, что противоречит условию CD не || AB

3) Вывод: $CD \cap \alpha$ 4) Рассмотрим ΔACE и ΔBDE; $\angle E$ – общий $\angle A = \angle B$ (как соответственные при AC || BD и секущей AB) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta ACE \sim \Delta BDE \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DE};\ \frac{8}{6} = \frac{BE+4}{BE};$$

$$8BE = 6(BE+4);\ 4BE - 3BE = 12;\ BE = 12\,см$$

89. Дано: A, B, C, D $\notin \alpha$; M_1 - точка пересечения медиан ΔABC;
M_2 – точка пересечения медиан ΔBCD;
Доказать: $M_1M_2 \parallel AD$



1) Рассмотрим ΔADK и ΔM_1M_2K (лежат в одной плоскости)
$\angle K$ - общий

$$\frac{AK}{M_1K} = \frac{DK}{M_2K} = \frac{3}{1}$$ (свойство медиан треугольников) $\Rightarrow$

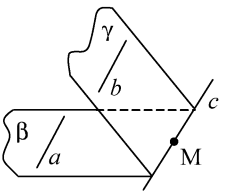
$\Delta ADK \sim \Delta M_1M_2K$ (по 2 стор. и углу между) $\Rightarrow \angle DAK = \angle M_2M_1K$ соответственные углы при прямых AD и M_1M_2 и секущей AK.
Значит, по признаку параллельных прямых $AD \parallel M_2M_1$, чтд.

90. Дано: ABCD - трапеция; B, A $\in \alpha$, C, D $\notin \alpha$
Как расположена CD относительно α, если а) AB – основание
б) AB - боковая сторона ?; Ответ:
а) $CD \parallel \alpha$ по признаку параллельности прямой и плоскости

$$\left.\begin{matrix} CD \parallel AB\ (опр.) \\ AB \in \alpha \end{matrix}\right| \to CD \parallel \alpha$$

б) $CD \cap \alpha = E$; CD не $\parallel$ AB (по определению), значит, $CD \cap AB = E$, т.к. $AB \in \alpha$, значит, $E \in \alpha$.

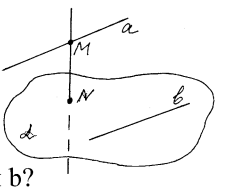
91. Дано: $a \parallel b \in \alpha$; $M \notin \alpha$; $\gamma : b$, $M \in \gamma$;
$\beta : a$, $M \in \beta$; Доказать: $\gamma \cap \beta = c$, $c \parallel a \parallel b$
Доказательство:



1) $$\left.\begin{matrix} M \in \beta\ (усл.) \\ M \in \gamma\ (усл.) \end{matrix}\right| \to \beta \cap \gamma = c, M \in c$$

2) Т.к. $$\left.\begin{matrix} \gamma \cap \beta = c \\ a \in \beta, b \in \gamma \\ a \parallel b \end{matrix}\right| \to c \parallel a \parallel b$$ (следствие признака параллельности прямой и плоскости), чтд

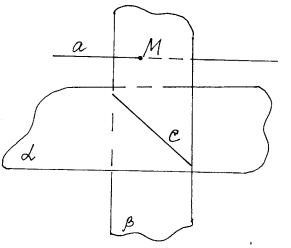
92. Дано: $b \parallel \alpha$, $b \parallel a$; Доказать: $a \parallel \alpha$ или $a \in \alpha$
1) Пусть $a \cap \alpha = A$
2) Тогда $$\left.\begin{matrix} a \parallel b\ (усл.) \\ a \cap \alpha = A \end{matrix}\right| \to b \cap \alpha$$, что противоречит условию $b \parallel \alpha$
3) Вывод: наше предположение $a \cap \alpha$ неверно, а верно то, чтд



93. Дано: $a \parallel b$; $M \in a$,
MN не пересекает b
Каково взаимное расположение прямых MN и b?
MN и b – скрещивающиеся, т.к. не имеют общих точек и лежат в разных плоскостях.

94. Дано: a $\overline{\cdot}$ b; M $\notin$ a, M $\notin$ b; α : a, M $\in \alpha$; β : b, M $\in \beta$
Пересекаются ли α и β?; Да, т.к. M – общая точка, значит, $\alpha \cap \beta$ по прямой, проходящей через точку M.

95. Дано: a || α; $a \cap \beta = M$; Доказать: $\beta \cap \alpha$; Доказательство:
(см. док-во задачи 55); 1) Возьмем произвольную точку A$\in \alpha$. Через A и a можно провести некоторую плоскость γ :
A, a $\in \gamma$ - единственная.

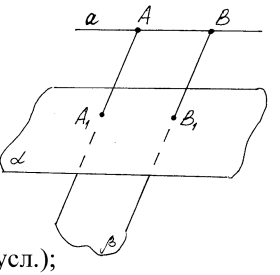


Т.к. $\left.\begin{matrix} a \in \gamma \\ a \| \alpha \end{matrix}\right| \rightarrow \gamma \cap \alpha = b$, такой, что a || b

2) Т.к. $\left.\begin{matrix} a \cap \beta = M (усл.) \\ b \| a \end{matrix}\right| \rightarrow b \cap \beta = N$

Т.к. b$\in \alpha$, то и N$\in \alpha$, т.е. N - общая точка двух плоскостей α и β, значит, $\alpha \cap \beta$, чтд.

96. Дано: AA_1 || BB_1; α || a
Доказать: $AA_1 = BB_1$; Доказательство:



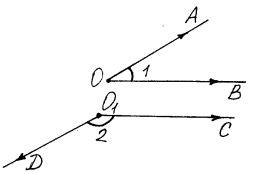
1) Т.к. AA_1 || BB_1, то $\exists \beta$: AA_1, $BB_1 \in \beta$

2) Т.к. $\left.\begin{matrix} AB \in \beta \\ AB \| \alpha \end{matrix}\right| \rightarrow \beta \cap \alpha = A_1B_1$

и AB || A_1B_1

3) Таким образом имеем: AA_1 || BB_1 (усл.);
AB || A_1B_1 (из 2) $\Rightarrow ABB_1A_1$ – параллелограмм, а значит, $AA_1 = BB_1$, чтд

97. Дано: OB || O_1C; AO || O_1D.
Доказать: $\angle AOB = \angle CO_1D$
или $\angle AOB + \angle CO_1D = 180°$



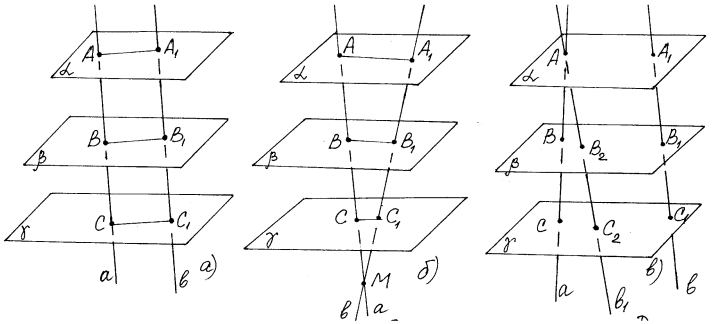
При параллельном переносе величина углов сохраняется; если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны (теорема).

Если стороны противоположно направлены, то при параллельном переносе они образуют либо вертикальные углы, либо смежные. А по свойствам этих углов: $\angle 1 = \angle 2$ или $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, чтд

98. Дано: a || α; Существует ли β: a$\in \beta$ и β || α ?; Доказательство:
1) Возьмем A$\in \alpha$ и проведем в ней 2 пересекающиеся прямые m и n так, чтобы m || a.
2) Возьмем B$\in$ a и проведем прямую b: B$\in$ b и b || n.
3) $a \cap b = B \Rightarrow \exists \beta$: a, b $\in \beta$ и β || α (по призн. параллельности прямых).

Единственность плоскости β очевидна, т.к. через 2 пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость.

99



Дано: $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$; a, b – произвольные; $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = B$, $a \cap \gamma = C$; $b \cap \alpha = A_1$, $b \cap \beta = B_1$, $b \cap \gamma = C_1$; Доказать: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$

а) Если $a \parallel b$, то отрезки параллельных прямых, заключенные между $\parallel$ плоскостями, равны, и значит, $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ – очевидно.

б) Если $a \cap b = M$, то $\exists\, \xi$: $a, b \in \xi$ такая, что $\alpha \cap \xi = AA_1$, $\beta \cap \xi = BB_1$, $\gamma \cap \xi = CC_1$ и из подобия $\Delta AMA_1 \sim \Delta BMB_1 \sim \Delta CMC_1$ получим требуемый результат.

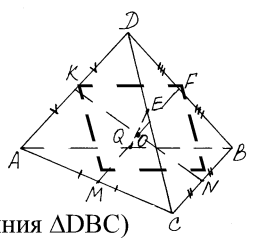
в) Если $a \times b$, то, пользуясь параллельным переносом, свойством сохранения расстояния при параллельном переносе, сведем задачу к случаям (б) и (а); получим:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB_2}{B_2C_2};\ т.к.\ AB_2 = A_1B_1; B_2C_2 = B_1C_1;\ то\ \frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$$

100. Дано: $a \times b$; A; Доказать: $\exists\beta$: $A \in \beta$ и $\beta \in b$ или $\beta \parallel a$; β - единственная. 1) $A \notin a$, значит, $\exists\beta$: A, $a \in \beta$ и $\beta \parallel b$ (теорема о плоскости, проходящей через одну из скрещивающихся прямых). Если рассмотрим $A \notin b$, то $\exists\gamma$: A, $b \in \gamma$ и $\gamma \parallel a$ (та же самая теорема). Каждая из этих плоскостей единственная.

2) Построим через точку A прямую $m \parallel a$ и $n \parallel b$ (они единственные по свойству параллельности прямых). $m \cap n = A \Rightarrow \exists\beta$: m, $n \in \beta$.

Отсюда: $\left.\begin{matrix} m \in \beta \\ m \parallel a \end{matrix}\right| \to a \parallel \beta;\ \left.\begin{matrix} n \in \beta \\ n \parallel b \end{matrix}\right| \to b \parallel \beta$



101. Дано: ABCD - тетраэдр; K, F, N, M, Q, E - середины ребер

Доказать: $KN \cap MF \cap QE = O$ и $KO = ON$, $MO = OF$, $QO = OE$; Доказательство:

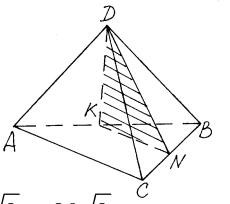
1) $EF = \frac{1}{2}BC$ и $EF \parallel BC$ (как средняя линия ΔDBC)

$MQ = \frac{1}{2}BC$ и $MQ \parallel BC$ (как средняя линия ΔABC) $\Rightarrow$

MQFE – параллелограмм (по признаку), а $MF \cap EQ = O$ – диагонали параллелограмма и $MO = OF$; $EO = OQ$.

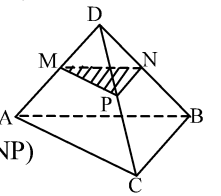
2) Аналогично доказывается: $MF \cap KN = O$ и $MO = OF$; $KO = ON$, чтд

102. Дано: ABCD - тетраэдр; AD=DC=DB=BC=AC=AB = 20 см;
K ∈ AB, AK=KB; N ∈ BC, CN=NB



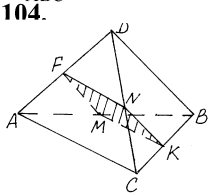
Доказать: AC | | (KDN); Найти: P_{KND}–? S_{KND}–?
Доказательство: 1) AC | | KN,
т.к. KN – средняя линия ΔABC
KN ∈ (KDN) ⇒ AC | | (KDN) по признаку параллельности прямой и плоскости

2) $KN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 20 = 10\,см$; $KD = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,см$
(т.к. KD и DN - высоты в правильных треугольниках) Отсюда:
$P_{KDN} = 10 + 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 10\left(1 + 2\sqrt{3}\right)см$; $S_{KDN} = \frac{1}{2}KN \cdot DO$, *где*
$DO \perp KN$; $DO = \sqrt{DN^2 - ON^2}$; $DO = \sqrt{300 - 25} = \sqrt{275} = 5\sqrt{11}\ см$
$S_{KDN} = \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot 5\sqrt{11} = 25\sqrt{11}\ см^2$

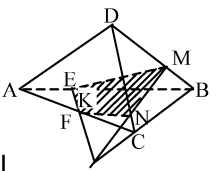


103. Дано: ABCD – тетраэдр;
M∈ DA; N∈ DB; P∈ DC;
DM:MA=DN:NB=DP:PC; Доказать: (ABC) | | (MNP)
Найти: S_{MNP}, если S_{ABC}=10 см² и DM:MA=2:1
Док-ство: 1) Т.к. ΔADC ~ ΔMDP; ΔCDB ~ ΔNDP; ΔADB ~ ΔMDN (по углу и двум сторонам, с одним и тем же коэффициентом подобия), то AC | | MP, BC | | NP и AB | | MN.
Отсюда (ABC) | | (MNP) по признаку параллельности плоскостей.
2) Т.к. DM:MA=2:1, значит, DM:DA=2:3 отсюда $k = \frac{2}{3}$
$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{MNP} = \frac{4}{9}\cdot 10 = 4\frac{4}{9}$ см²

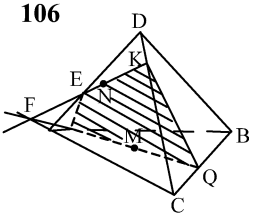
104.



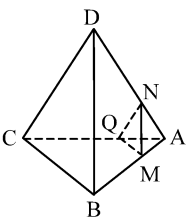
105.



106

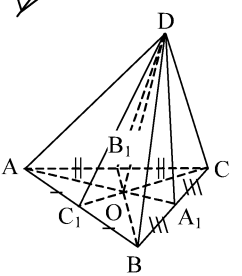


107.



MN | | DB; MQ | | BC
NQ | | CD

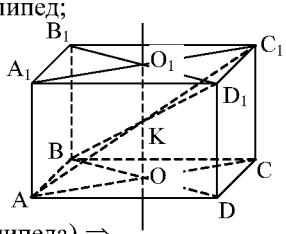
108.



Дано: ABCD – тетраэдр; DA_1, DB_1, DC_1 – биссектрисы; Доказать: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$
Доказательство:

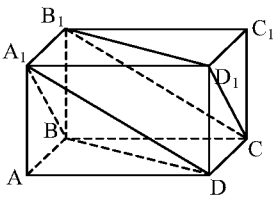
Плоскости (ADA_1), (BDB_1) и (CDC_1) имеют одну общую точку D, значит, они пересекаются по прямой, проходящей через точку D.
$DO \perp (ABC)$ $пр_\alpha DB_1 = BO$, $пр_\alpha DC_1 = CO$, $пр_\alpha A_1D = AO$, $BO \in (DBB_1)$;
$CO \in (CC_1D)$; $OA \in (AA_1D)$, т.е. O принадлежит всем плоскостям. Значит, DO - прямая пересечения плоскостей (ADA_1); (BDB_1) и (CDC_1).

109. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед;
$(BB_1D_1) \cap (AA_1C_1) = OO_1$



Доказать:
$OO_1 \,||\, AA_1 \,||\, BB_1 \,||\, CC_1 \,||\, DD_1$
Доказательство:
1) $(AA_1C_1) \cap (BB_1D_1) = OO_1$
(по условию)
$CC_1 \,||\, DD_1$ (по определению параллелепипеда) $\Rightarrow$
$CC_1 \,||\, OO_1$ (свойство параллельности прямой и плоскости),
т.е. линия пересечения OO_1 плоскостей параллельна всем боковым ребрам параллелепипеда.
2) Диагонали параллелепипеда
Т.е. AC_1 и A_1C, BD_1 и B_1D - являются диагоналями параллелограммов AA_1C_1C и BB_1D_1D, то по свойству $AC_1 \cap A_1C = K$, $BD_1 \cap BD_1 = K$ и $K \in OO_1$.

110. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед

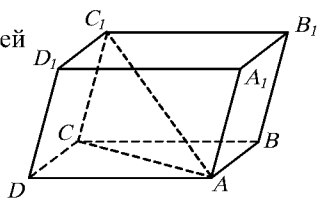


Доказать: $(A_1BD) \,||\, (B_1D_1C)$
Доказательство:
1) $ABCD = A_1B_1C_1D_1$ (по определению)
Значит, $BD = B_1D_1$ и $BD \,||\, B_1D_1$
2) $A_1B \,||\, D_1C$ и $A_1B = D_1C$ – как диагонали равных граней. Отсюда:

$$\left.\begin{array}{r} BD \cap A_1B = B \in (A_1BD) \\ B_1D_1 \cap D_1C_1 = D_1 \in (B_1D_1C) \\ A_1B \,||\, D_1C \\ BD \,||\, B_1D_1 \end{array}\right| \rightarrow (A_1BD) \,||\, (B_1D_1C)$$

по признаку параллельности плоскостей

111. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед.



Доказать: $A_1C < AB + AD + AA_1$
Доказательство: 1) Рассмотрим
ΔAA_1C: $A_1C < AA_1 + AC$ (*)
(свойство неравенства треугольника)
2) Рассмотрим ΔABC: $AC < AB + BC$ (св-во неравенства тр-ника)
Т.к. $BC = AD$, то $AC < AB + AD$ (**)

3) Соединим (*) и (**):
$$\left.\begin{array}{r} A_1C < AA_1 + AC \\ AC < AB + AD \\ A_1C < AA_1 + AB + AD \end{array}\right| \rightarrow A_1C < (AB + AD) + AA_1$$

112. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед

Доказать: $A_1C^2+AC_1^2+BD_1^2+B_1D^2= 4AD^2+4AB^2+4AA_1^2$

Доказательство: 1) Рассмотрим AA_1C_1C – параллелограмм и BB_1D_1D - параллелограмм; $A_1C^2+AC_1^2=2AA_1^2+2AC^2$ (свойство диагоналей параллелограмма); $B_1D^2+BD_1^2=2BB_1^2+2BD^2$

$A_1C^2+AC_1^2+ B_1D^2+BD_1^2=2AA_1^2+2BB_1^2+2AC^2+2BD^2$ (*)

2) Рассмотрим ABCD: $AC^2+BD^2=2AB^2+2AD^2$ (**)

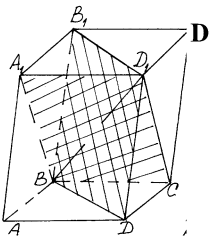
3) Совместим (*) и (**)

$A_1C^2+AC_1^2+ B_1D^2+BD_1^2=2(A_1A^2+BB_1^2)+2(2AB^2+2AD^2)$

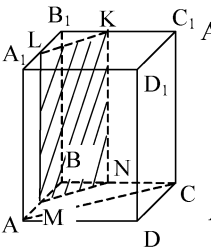
$A_1A^2+BB_1^2=2AA_1^2$, поэтому:

$A_1C^2+AC_1^2+ B_1D^2+BD_1^2=4AA_1^2+4AD^2+4AB^2$

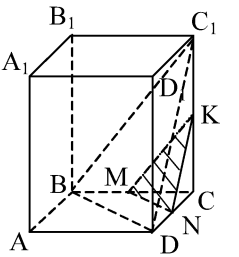
113. Т.к. B_1D_1 принадлежит обеим плоскостям, то $(A_1BCD_1)\cap(BDD_1B_1)=BD_1$



114



115



Глава II. Перпендикулярность прямых и плоскостей

116. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллелепипед

Доказать: а) $DC\perp B_1C_1$, $AB\perp A_1D_1$, если $\angle BAD=90°$

б) $AB\perp CC_1$, $DD_1\perp A_1B_1$, если $AB\perp DD_1$ Доказательство: а) 1) ABCD - параллелограмм по определению параллелепипеда, $\angle A=90°$ (по условию) $\Rightarrow$ ABCD – прямоугольник

2) Т.к. $AD=A_1D_1=B_1C_1$ (свойство параллелепипеда)

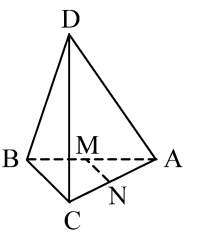
$AD \,||\, A_1D_1 \,||\, B_1C_1 \Rightarrow DC\perp B_1C_1$, $AB\perp A_1D_1$

б) Т.к. $\left.\begin{matrix} AB\|A_1B_1 \\ AB\perp DD_1 \end{matrix}\right| \to A_1B_1\perp D_1D$ (лемма)

Т.к. $\left.\begin{matrix} AB\perp DD_1 \\ DD_1\|CC_1 \end{matrix}\right| \to AB\perp CC_1$ (лемма)

117. Дано: ABCD - тетраэдр; $BC\perp AD$; $M\in AB, AM=MB; N\in AC, AN=NC$.

Доказать: $AD\perp MN$; Доказательство: $MN \,||\, BC$ (как средняя линия ΔABC); $BC\perp AD \Rightarrow MN\perp AD$ (лемма), чтд

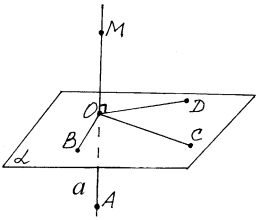


118. Дано: $a \perp \alpha$; A, M, O $\in$ a; O, B, C, D$\in \alpha$

Определить прямой угол:

$\angle AOB=90°$; $\angle MOC=90°$

$\angle DOA=90°$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости)



119. Дано: $AO \perp (BOC)$; $O \in AD$, AO=OD

Доказать: а) AB=DB; $\Delta AOB=\Delta DOB$

Т.к. OB - общая AO=OD (по условию)

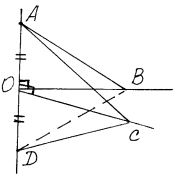
$\angle AOB=\angle DOB=90° \Rightarrow AB=DB$

б) AB=AC, если OB=OC; $\Delta AOB=\Delta AOC$

Т.к. AO – общая, OB=OC (по условию)

$\angle AOB=\angle AOC=90° \Rightarrow AB=AC$

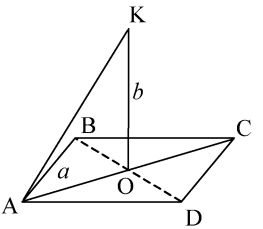
в) BO=OC, если AB=AC, BO=OC из $\Delta AOB=\Delta AOC$ (по катету и гипотенузе)



120. Дано: ABCD - квадрат; AB=a, $AC \cap BD=O$, $OK \perp (ABC)$; OK=b

Найти: KA – ?; Решение:

Рассмотрим ΔAKO: $\angle O=90°$ (т.к. $OK \perp (ABC)$)



$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}; \text{ Отсюда}: AK = \sqrt{AO^2 + OK^2}; AK = \sqrt{\frac{a^2}{2} + b^2}$$

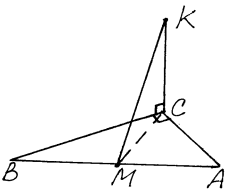
121. Дано: ΔABC, $\angle C=90°$; AC=6 см, BC=8 см – медиана; $CK \perp (ABC)$, CK=12 см

Найти: KM – ?; Решение:

1) $AB = \sqrt{BC^2 + CA^2} = \sqrt{36+64} = 10$ см

2) $MC = \frac{1}{2}BA = 5$ см

(свойство медианы прямоугольного треугольника)



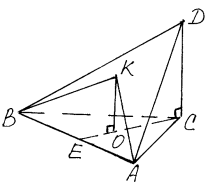
3) ΔMCK: $\angle C=90°$ (т.к. $KC \perp (ABC)$); MC=5 см; KC=12 см $\Rightarrow$

$\Rightarrow MK = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ см

122. Дано: ΔABC - правильный; $CD \perp (ABC)$; OK || CD; $AB = 16\sqrt{3}$ см, OK=12 см, CD=16 см

Найти: DA, DB, KA, KB - ?

Решение: 1) Т.к. ΔABC - правильный, то:



$$EC = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{16 \cdot 3}{2} = 8 \cdot 3 = 24 \text{ см}; \ OE:OC=1:2 \Rightarrow OE=8 \text{ см}, OC=16 \text{ см}$$

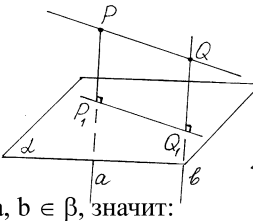
2) $\Delta DCA=\Delta DCB$ (по двум катетам), значит DA=DB и

$DA = \sqrt{DC^2 + AC^2}$; $DA = \sqrt{256+256 \cdot 3} = 32$

3) $\Delta KOA=\Delta KOB$ (по двум катетам), значит KA=KB и

$KA = \sqrt{KO^2 + OA^2}, т.к. OA = OC = 16 см, то\ KA = \sqrt{144+256} = 20 см$

124. Дано: $PQ \parallel \alpha$; $P \in a$, $a \perp \alpha$, $a \cap \alpha = P_1$; $Q \in b$, $b \perp \alpha$, $b \cap \alpha = Q_1$



Доказать: $PQ = P_1Q_1$; Доказательство:

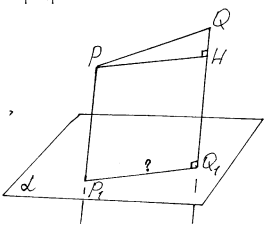
1) Т.к. $\left.\begin{matrix} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{matrix}\right| \rightarrow a \parallel b$ (свойство перпендикулярности прямых и плоскости)

Эти две прямые определяют плоскость β: $a, b \in \beta$, значит:

$$\left.\begin{matrix} PQ \in \beta \\ PQ \parallel \alpha \\ \beta \cap \alpha = P_1Q_1 \end{matrix}\right| \rightarrow PQ \parallel P_1Q_1 \text{ (свойство)}$$

2) Вывод: $PP_1 \parallel QQ_1$ (из 1); $PQ \parallel P_1Q_1$ (из 2) $\Rightarrow PQQ_1P_1$ – параллелограмм (по определению). Значит $PQ = P_1Q_1$, чтд

125. Дано: $PP_1 \perp \alpha$; $QQ_1 \perp \alpha$; $PQ = 15$ см, $PP_1 = 21,5$ см, $QQ_1 = 33,5$ см



Найти: P_1Q_1 - ?

Решение:

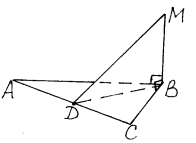
1) $PP_1 \parallel QQ_1 \Rightarrow \exists \beta$: $P, Q, P_1, Q_1 \in \beta$

2) Рассмотрим четырехугольник PQQ_1P_1: $PP_1 \parallel QQ_1$, P_1Q_1 не $\parallel PQ$, значит, этот четырехугольник – прямоугольная трапеция.

3) $PH \parallel P_1Q_1$, тогда ΔPQH – прямоугольный; $PQ = 15$ см, $QH = QQ_1 - PP_1$; $QH = 12$ см

$PH = \sqrt{PQ^2 - QH^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$ см, отсюда $P_1Q_1 = 9$ см

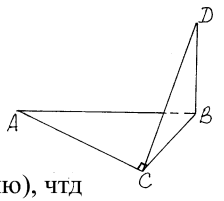
126. Дано: ΔABC; $MB \perp (ABC)$; $D \in AC$



Определить вид ΔMBD; Решение:

Т.к. $MB \perp (ABC)$, то по определению $MB \perp DB$, значит ΔMBD - прямоугольный.

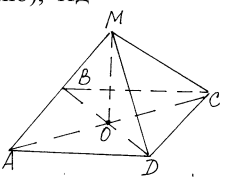
127. Дано: ΔABC; $\angle A + \angle B = 90°$; $DB \perp (ABC)$



Доказать: $CD \perp AC$; Доказательство:

1) $AC \perp CB$, т.к. ΔABC - прямоугольный, $\angle C = 90°$; $AC \perp DB$, т.к. $DB \perp (ABC)$ $AC \perp (BCD)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Значит $AC \perp CD$ (по определению), чтд

128. Дано: ABCD - параллелограмм; $AC \cap BD = O$; $AM = MC$, $MB = MD$

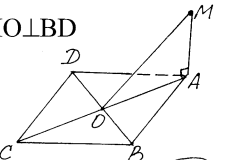


Доказать: $MO \perp (ABC)$; Доказательство:

1) Т.к. $MA = MC$, то $MO \perp AC$ (свойство серединного перпендикуляра к отрезку). Т.к. $BM = MD$, то $MO \perp BD$ (свойство серединного перпендикуляра к отрезку) $AC \cap BD = 0$

Имеем: $\left.\begin{matrix} OM \perp AC \\ OM \perp BD \end{matrix}\right| \rightarrow OM \perp (ABC)$ (по признаку) чтд

129. Дано: ABCD - квадрат; AM⊥(ABC); AC∩BD=O; Доказать: а) BD⊥(AMO); б) MO⊥BD

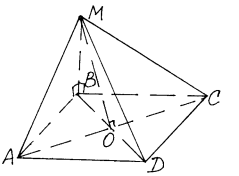


1) Т.к. MA⊥(ABC), то MA⊥BD, AO⊥BD (свойство диагоналей квадрата) ⇒

$$\left.\begin{array}{l} AM \cap AO = O \\ BD \perp AM \\ BD \perp AO \end{array}\right| \to BD \perp (AMO)$$ по признаку;

2) Т.к. BD⊥(AMO), то BD⊥MO по определению, чтд

130. Дано: ABCD - квадрат; ∠MBA=∠MBC=90°; MB=m, AB=n
Найти: MA, MC, MD, MO – ?; Решение:



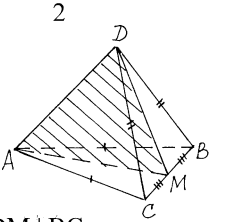
1) Т.к. ΔABM=ΔCBM (по двум катетам), то $AM = MC = \sqrt{m^2 + n^2}$; Из ΔMDB:

$$\left.\begin{array}{l} \angle B = 90^0 \\ MB = m \\ BD = n\sqrt{2} \end{array}\right| \to MD = \sqrt{m^2 + 2n^2}$$

2) Расстояние от M до BD равно MB=m; MO⊥AC,

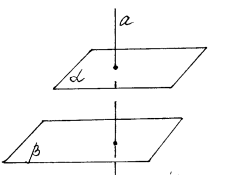
$$MO = \sqrt{MB^2 + BO^2}\,;\ MO = \sqrt{m^2 + \frac{2n^2}{4}} = \frac{\sqrt{4m^2 + 2n^2}}{2}$$

131. Дано: ABCD - тетраэдр; M∈ BC, BM=MC; AB=AC; DB=DC
Доказать: BC⊥(ADM)



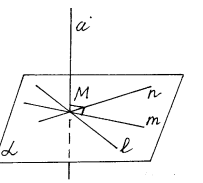
Доказательство:
1) ΔABC - равнобедренный, т.к. AB=AC, значит медиана AM⊥BC (свойство). Аналогично в ΔBDC: DM⊥BC.
2) Имеем: AM∩MD=M ∈ (ADM); BC⊥AM; BC⊥DM ⇒
⇒BC⊥(ADM) по признаку, чтд.

132. Дано: α || β, a⊥α; Доказать: a⊥ β



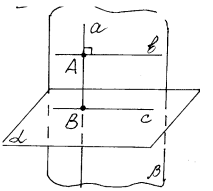
Доказательство: 1) Пусть a∩β=B. Проведем через точку B произвольную прямую b ∈ β. Тогда a∩b=B определяют плоскость γ : α∩γ=b_1.
Т.к.α || β по условию, то b || b_1 (свойство).
2) Имеем a⊥α ⇒ a⊥b_1. Т.к. b_1 || b, то a⊥b, где b - произвольная прямая плоскости β, значит, a⊥β по определению)

134. Дано: M ∈ a; M∈ m, m⊥a; M ∈ n, n⊥a
Доказать: ∃ α: m, n ∈ α, a⊥α;



Доказательство: Т.к. прямые m, n перпендикулярны a и пересекаются в одной точке M, то они определяют плоскость α: m, n ∈ α и она перпендикулярна прямой a по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

135. Дано: $a \perp \alpha$, $a \perp b$; $b \notin \alpha$



Доказать: $\alpha \parallel b$; Доказательство:

1) $a \cap b = A \Rightarrow \exists \beta$: $a, b \in \beta$

Отсюда $\alpha \cap \beta = c$, такой, что $B \in c$.

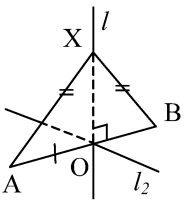
2) Т.к. $a \perp \alpha$, то $a \perp c$ (по определению)

$a \perp b$ (по условию) $\Rightarrow$

$\Rightarrow b \parallel c$ (свойство параллельных прямых)

3) $\left.\begin{matrix} b \parallel c \\ c \in \alpha \end{matrix}\right| \rightarrow b \parallel \alpha$ (признак параллельности прямой и плоскости), чтд

136. Дано: AB, XA=XB



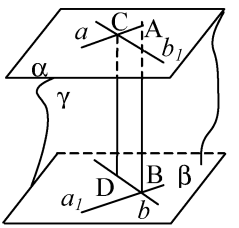
Доказать: $X \in \alpha$: $O \in \alpha$, $AB \perp \alpha$

Доказательство:

1) Если XA=XB, то $X \in l$ – серединному перпендикуляру к отрезку AB. Проведем через O еще один перпендикуляр к AB, $l_2 \perp AB$.

Две пересекающиеся прямые l и l_2 определяют единственную плоскость α: l и $l_2 \in \alpha$, а значит, $O, X \in \alpha$.

Т.к. $\left.\begin{matrix} l \perp AB \\ l_2 \perp AB \end{matrix}\right| \rightarrow AB \perp \alpha$ по признаку, чтд



137. Дано: $a \times b$; $\angle(a, b) = 90°$

Доказать: $\exists\, \gamma$: $a \in \gamma$, $b \perp \gamma$

Доказательство:

Плоскости $\alpha \parallel \beta$, т.к. через каждую из скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой (свойство).

$a \parallel a_1$, $b \parallel b_1 \Rightarrow \alpha \parallel \beta$.

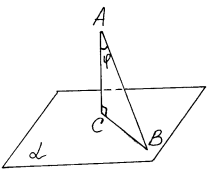
Плоскость γ проходит через прямую $a \parallel \beta$, значит, пересекает β по прямой a_1.

AB - общий перпендикуляр плоскостей α и β.

Имеем: $AB \perp b$ (т.к. $AB \perp \beta$); $b \perp a_1$ (т.к. $b \perp a$, $a \parallel a_1$) $\Rightarrow$

$b \perp \gamma$ (по признаку) чтд

138. Дано: $AC \perp \alpha$, AB - наклонная; $\angle CAB = \varphi$, AC=d; Найти: AB и BC; Решение:



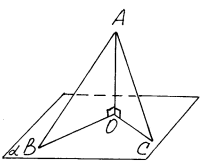
1) Т.к. $AC \perp \alpha$, то $\angle ACB = 90°$ и тогда

$$AB = \frac{AC}{\cos\varphi} = \frac{d}{\cos\varphi}; \; CB = d \cdot tg\varphi$$

б) Найти CA и CB, если AB=m

$CA = AB\cos\varphi = m\cos\varphi$; $CB = AB\sin\varphi = m\sin\varphi$

139. Дано: AB, AC - наклонные



Доказать: а) OB=OC, если AB=AC

$\Delta ABO = \Delta ACO$ (по катету AO и гипотенузам AB=AC) $\Rightarrow$ OB=OC

б) AB=AC, если BO=OC

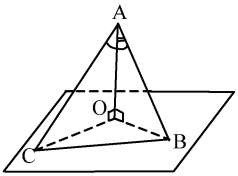
Это верно и следует из того, что ΔABO=ΔACO (по двум катетам)

в) BO> CO, если AB> CA; По свойству неравенства треугольников:

AB<AO+BO; AC<AO+CO ⇒ AB-AC<AO+BO – AO – CO

AB – AC<BO – CO. Т.к. AB>CA (по условию), то AB – AC>0,

отсюда BO – CO>0 ⇒ BO>CO, чтд



140. Дано: AO⊥α; AB, AC – наклонные;

∠OAB=∠BAC=60°; AO=1,5 см

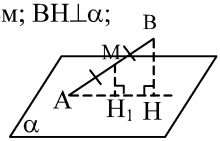
Найти: BC – ?; Решение: 1) ΔAOB:

$$\left.\begin{array}{l}\angle A=60^\circ\\ \angle O=90^\circ\\ OA=1{,}5см\end{array}\right|\to AB=3см.$$

2) Т.к. ΔCOB - проекция ΔACB на α, то ΔCOB - равнобедренный, отсюда ΔACB - равносторонний, т.к. ∠A= 60°, значит BC=3 см.

141. Дано:AB - отрезок. A∈α; B∉α; BH=6 см; BH⊥α;

M∈ AB, AM=MB;M_1H⊥α Найти: MH_1 – ?



Решение: Т.к. BH⊥α; и MH_1⊥α;,

то BH⊥MH_1 ⇒ $\triangle AMH_1 \sim \triangle ABH$,

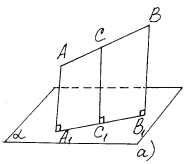
$$\frac{AB}{AM}=\frac{BH}{MH_1}=\frac{2}{1};\ MH_1=\frac{1}{2}BH=3см.$$

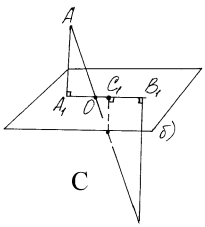
142. Дано: AA_1⊥α, BB_1⊥α;

AA_1=1 см, BB_1= 4 см;

C∈AB, AC=CB

Найти: CC_1 – ?





Решение: 1) ABB_1A_1 –

прямоугольная трапеция, т.к.

$$\left.\begin{array}{l}AA_1\perp\alpha\\ BB_1\perp\alpha\end{array}\right|\to AA_1\|BB_1 \text{ – основания}$$

т. к. AC = CB, а CC_1 ⊥ α, то CC_1 средняя линия трапеции, отсюда

$CC_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) = \frac{1}{2}(1 + 4) = 2{,}5$ см.

2) AB пересекает пл. α в точке O; $\Delta AA_1O \sim \Delta BB_1O$ (AA_1 ⊥ α; BB_1 ⊥ α; ⇒ $\angle A_1 = \angle B_1 = 90^0$; $\angle A_1OA = \angle B_1OB$ (как накрест лежащие), отсюда $\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{AO}{BO}=\frac{1}{4}\Rightarrow BO=4AO$; AB = 5AO;

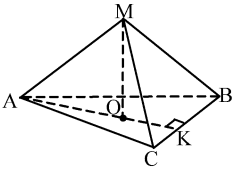
BC = AC = 2,5AO; $\Delta CC_1O \sim \Delta BB_1O$ (CC_1 ⊥ α; BB_1 ⊥ α; ⇒

$\angle C_1 = \angle B_1 = 90^0$; ∠O – общий), тогда $\frac{BB_1}{CC_1}=\frac{BO}{OC}$; BO = BC + OC;

BO = 2,5AO + OC; OC = 1,5 AO, тогда

$\frac{4}{CC_1}=\frac{4AO}{1{,}5AO}=\frac{4}{1{,}5}\Rightarrow CC_1=1{,}5\ см$ Ответ: CC_1 = 2,5 см или 1,5 см

143. Дано: ΔABC – правильный;
MA=MB=MC=4 см;
MO⊥(ABC), AB=6 см
Найти: OM – ?; Решение:

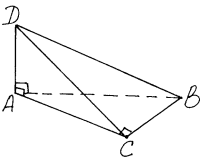


1) ΔABC: $AK = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ см

2) ΔAMO=ΔBMO=ΔCMO (по катету MO и гипотенузам AM=MB=MC) ⇒ AO=OB=OC, т.е. O – центр окружности, описанной около ΔABC. $AO = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ см$;

3) ΔAMO: $\left.\begin{matrix}\angle O = 90^0 \\ AM = 4см \\ AO = 2\sqrt{3}см\end{matrix}\right| \to MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{16-12} = \sqrt{4} = 2$ см

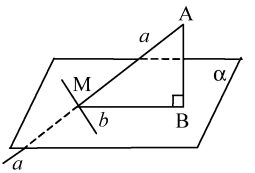
145. Дано: ΔABC, ∠C=90°; AD⊥(ABC); BC=a, DC=b; Доказать: ΔBCD – прямоугольный; Найти: BD – ?



Решение: 1) BC⊥AC (по условию)
BC проходит через основание наклонной DC, значит, BC⊥DC (по теореме о трех перпендикулярах), отсюда ∠BCD=90°, т.е. ΔBCD – прямоугольный.

2) $DB = \sqrt{DC^2 + CB^2}$; $DB = \sqrt{a^2 + b^2}$

146. Дано: a∩α=M; a не ⊥ α
Доказать: ∃b: M ∈ b; b ∈ α; a⊥b
Доказательство:



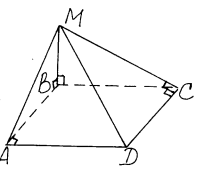
1) Возьмем произвольную точку A∈ a. Опустим перпендикуляр на плоскость α, т.е. AB⊥α.

2) $\left.\begin{matrix}MB \in \alpha \\ AB \perp \alpha\end{matrix}\right| \to AB \perp MB$, т.е. ΔABM – прямоугольный

3) Через точку M в плоскости α построим прямую b: b⊥MB (это прямая b – единственная, доказано в планиметрии).

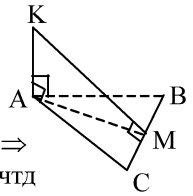
4) Т.к. b проходит через основание наклонной и b⊥MB (проекции прямой a на плоскость α), по теореме о трех перпендикулярах b⊥a, чтд

147. Дано: ABCD – прямоугольник; MB⊥(ABC)
Доказать: ΔAMD и ΔCMD – прямоугольные
Доказательство: 1) MB⊥AB (т.к. MB⊥(ABC))
AB⊥AD (т.к. ABCD – прямоугольник)
AM⊥AD по теореме о трех перпендикулярах.
Отсюда, ΔAMD – прямоугольный.



2) Аналогично: $\left.\begin{matrix}MB \perp BC \\ BC \perp CD\end{matrix}\right| \to MC \perp CD$ (по теореме о трех перпендикулярах). Значит, ΔMCD – прямоугольный

148. Дано: ΔABC – правильный; AK⊥(ABC); M ∈ BC, MB=MC; Доказать: MK⊥BC



Доказательство:

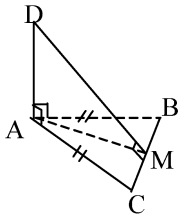
1) KA⊥AM (т.к. KA⊥(ABC))

AM⊥BC (как высота в равностороннем ΔABC)⇒

KM⊥BC (по теореме о трех перпендикулярах) чтд

149. Дано: ΔABC; AB=AC=5 см; BC=6 см, AD⊥(ABC) AD=12 см; Найти: AK и DK – ?

Решение: 1) AK⊥BC



$$AK=\sqrt{AC^2-CK^2}=\sqrt{AC^2-\frac{1}{4}CB^2}$$

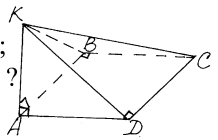
$$AK=\sqrt{5^2-3^2}=4\text{с м}$$

$$\left.\begin{array}{l}2)DA\perp AK\\ AK\perp BC\end{array}\right|\to DK\perp BC$$

(по теореме о трех перпендикулярах)

$$DK=\sqrt{DA^2+KA^2}=\sqrt{144+16}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}\text{ см}$$

150. Дано: ABCD – прямоугольник; AK⊥(ABC); KD=6 см, KB=7 см, KC=9 см. Найти: AK, AD – ?



Решение:

$$\begin{cases}KB^2=AB^2+AK^2\\ KD^2=AD^2+AK^2\\ KC^2=AB^2+AD^2+AK^2\end{cases}\quad\begin{cases}AB^2=KB^2-AK^2\\ AD^2=KD^2-AK^2\\ KC^2=KB^2-AK^2+KD^2-AK^2+AK^2\end{cases}$$

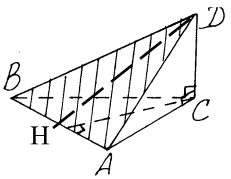
$$9^2=7^2-AK^2+6^2;\ 81=49-AK^2+36;\ AK^2=4\Rightarrow AK=2\ см$$

$$AD^2=36-4;\ AD^2=32;\ AD=4\sqrt{2}\ см.$$

151. Дано: ΔABC; CD⊥(ABC)

Доказать: а) ΔABC=пр$_{(ABC)}$ABD

б) DH – высота ΔABD, если CH – высота ΔABC

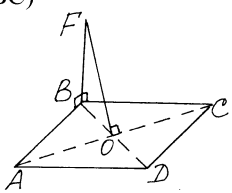


Доказательство:

1) Точки A и B ∈ (ABC), а пр$_{(ABC)}$D=C, значит, пр$_{(ABC)}$ΔABD=ΔABC

2) Если CH⊥BA, а DC⊥CH (т.к. DC⊥(ABC)), то DH⊥BA (по теореме о трех перпендикулярах), т.е. DH – высота ΔABD.

152. Дано: ABCD – квадрат; BF=8 дм, BF⊥(ABC) AB=4 дм; Найти: AF, FO – ?; Решение:



1) Расстояние от точки F до сторон AB и BC есть FB=8 дм.

2) Расстояние от F до сторон AD и DC есть:

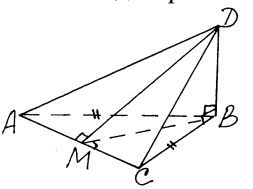
$$FA=FC=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}\text{ см}$$

(т.к. FA⊥AD по теореме о трех перпендикулярах; FA⊥AB (по условию), AB⊥AD (квадрат)).

3) FB⊥BD (по усл.); BO⊥AC (свойство диагоналей квадрата) ⇒ FO⊥AC (по теореме о трех перпендикулярах)

$FO = \sqrt{FB^2 + BO^2} = \sqrt{FB^2 + \frac{1}{4}BD^2} = \sqrt{8^2 + 8} = 6\sqrt{2}$ дм – расстояние от F до AC.

4) Расстояние от F до BD равно FB=8 дм.



154. Дано: ΔABC; BD⊥(ABC); BD=9 см, AC=10 см; BC=BA=13 см

Найти: DM, S_{ACD} – ? Решение:

1) DB⊥MB (т.к. BD⊥(ABC))

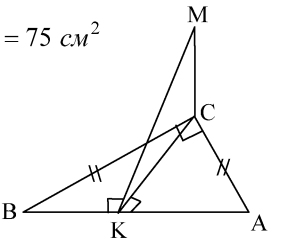
BM⊥AC (как высота ΔABC) ⇒

⇒ DM⊥AC (по теореме о трех перпендикулярах)

2) $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\ см$

$DM = \sqrt{MB^2 + BD^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15\ см$

3) $S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot DM$; $S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75\ см^2$



155. Дано: ΔABC, ∠C=90°; CA=CB; CM⊥(ABC), AC = 4 см; $CM = 2\sqrt{7}$ см

Найти: MK – ? Решение:

1) MC⊥CK (т.к. MC⊥(ABC))

CK⊥AB (как высота ΔABC) ⇒

⇒ MK⊥AB (по теореме о трех перпендикулярах)

ΔMCK – прямоугольный; $MK = \sqrt{MC^2 + CK^2}$

$CK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ см \Rightarrow MK = \sqrt{28 + 8} = \sqrt{36} = 6\ см$

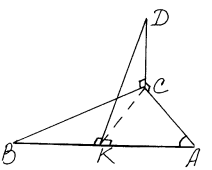
156. Дано: ΔABC, ∠C=90°; AC=m, ∠A=φ; CD⊥(ABC), CD=n

Найти: DK – ? Решение:

1) CK⊥AB, CK=msinφ

2) $\left.\begin{array}{l} DC \perp KC \\ KC \perp AB \end{array}\right| \rightarrow DK \perp AB$

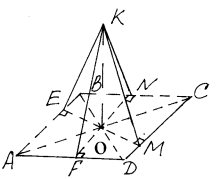
$DK = \sqrt{n^2 + m^2 \sin^2 \varphi}$



157. Дано: ABCD – ромб; AC∩BD=O, KO⊥(ABC); AC=6 дм, BD=8 дм, OK=4,5 дм

Доказать: KE=KN=KM=KF. Доказательство:

1) EM и FN – высоты ромба, они равны (это было доказано в младших классах).



Точка O делит EM и FN пополам (свойство); EO=OM=OF=ON

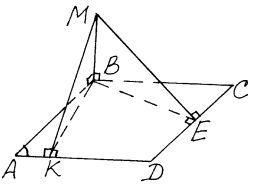
Отсюда: ΔKOE=ΔKOM=ΔKON=ΔKOF (по катетам), значит, KE=KN=KM=KF, чтд

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$; $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 6 \cdot 4 = 24\ дм^2$

С другой стороны: $S_{ABCD} = AB \cdot EM$; $24 = 5 \cdot EM$; $EM = 4{,}8\ дм$

3) ΔEKO:

$$\left.\begin{array}{l}\angle O = 90^0\\ KO = 4{,}5\text{дм}\\ EO = 2{,}4\text{дм}\end{array}\right| \to EK = \sqrt{KO^2 + EO^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{20{,}25 + 5{,}76} = 5{,}1$$



158. Дано: ABCD – ромб; BM⊥(ABC); AB=25 см, ∠BAD=60°; BM=12,5 см
Найти: MK, ME, MB – ?; Решение:

1) ΔABK:

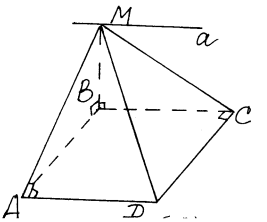
$$\left.\begin{array}{l}\angle K = 90^0\\ \angle A = 60^0\\ AB = 25\end{array}\right| \to BK = AB \cdot \sin A;\ BK = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

2) ΔMBK=ΔMBE (т.к. MB – общая, BK=BE)

$$ME = MK = \sqrt{MB^2 + BK^2} = \sqrt{12{,}5^2 + \left(\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)} = 25\text{ см}$$

3) MB=12,5 см – расстояние от M до AB и BC.

159. Дано: ABCD – прямоугольник; BM⊥(ABC); (AMD)∩(BCM)=a
Доказать: a⊥(ABM); Доказательство:



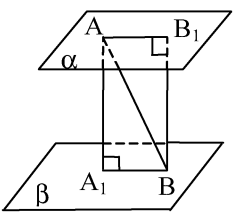
1) $\left.\begin{array}{l}(AMD)\cap(BMC) = a\\ BC \parallel AD\end{array}\right| \to a \parallel AD \parallel BC$

2) MB⊥AB (т.к. MB⊥(ABC)); AB⊥AD (т.к. ABCD – прямоугольник) ⇒
⇒ MA⊥AD (по теореме о трех перпендикулярах)

3) Т.к. $\left.\begin{array}{l}MA \perp AD\\ a \parallel AD\end{array}\right| \to MA \perp a;\ \left.\begin{array}{l}MB \perp BC\\ BC \parallel a\end{array}\right| \to MB \perp a$

4) $\left.\begin{array}{l}MA \perp a\\ MB \perp a\\ MA \cap MB = M\end{array}\right| \to a \perp$ (ABM) (по признаку), чтд

160. Дано: α | | β; AA_1⊥α, AA_1⊥β, AA_1=d; AB=13 см, d=5 см; Доказать: A_1B=AB_1
Доказательство:



1) $\left.\begin{array}{l}AA_1 \perp \alpha, AA_1 \perp \beta\\ BB_1 \perp \alpha, BB_1 \perp \beta\\ \alpha \parallel \beta\end{array}\right| \to AA_1 = BB_1$

2) AA_1 | | BB_1 (свойство параллельных прямых)
AA_1=BB_1 (из 1) ⇒ AB_1BA_1 – параллелограмм (признак), отсюда AB_1=A_1B

3) $A_1B = \sqrt{AB^2 - AA_1^{\ 2}} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см

161. Дано: $BA \notin (CBD)$; $\angle ABC=\angle ABD$, $\angle ABC<90°$; $BA_1=пр_\alpha AB$

Доказать: BA_1 – биссектриса $\angle CBD$

Доказательство:

1) Опустим перпендикуляры:

$A_1N \perp BD$; $A_1M \perp BC$;

Рассмотрим ΔABN и ΔABM; AB – общая

$\angle ABN=\angle ABM$ (по условию)ж $\angle N=\angle M=90°$ (т.к. $AN \perp BD$; $AM \perp BC$) $\Rightarrow \Delta ABN=\Delta ABM$ (по гиопотенузе и углу) $\Rightarrow BN=BM$

2) Рассмотрим ΔBA_1N и ΔBA_1M; BA_1 – общая; $BN=BM$ (из 1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BA_1N=\Delta BA_1M$ (по катету и гипотенузе) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A_1BN=\angle A_1BM \Rightarrow BA_1$ – биссектриса, ч

163. Дано: AM – наклонная, $AM=d$; $AK \perp \alpha$, $\angle AMK=\varphi$; Найти: MK – ?; Решение:

ΔMAK: $MK=AM\cos\varphi$

Если $\varphi=45°$, то $MK=d\cos45°$ $MK=\dfrac{d\sqrt{2}}{2}$

Если $\varphi=60°$, то $MK=d\cos60°$ $MK=\dfrac{d}{2}$

Если $\varphi=30°$, то $MK=d\cos30°$ $MK=\dfrac{d\sqrt{3}}{2}$

164. Дано: AB – наклонная, $BC \perp \alpha$, $\angle BAC=\varphi$, $AC=\dfrac{1}{2}AB$; Найти: φ – ?

Решение: ΔABC: $\angle C=90°$; $AC=\dfrac{1}{2}AB$, значит, $\angle B=30°$; Отсюда $\varphi=60°$

165. Дано: $AD \perp \gamma$, $AD=d$, $\angle ABD=\angle ACD=30°$, $\angle BDC=120°$

Найти: BC – ?; Решение:

1) $\Delta ABD=\Delta ACD$ (по катету и острому углу)

Отсюда $BD=CD$

и $BD=\dfrac{d}{tg30^0}=d\,ctg30^0=d\sqrt{3}$

2) ΔBDC: $BD=DC=d\sqrt{3}$, $\angle D=120°$

По теореме косинусов: $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle D$

$BC^2=\left(d\sqrt{3}\right)^2+\left(d\sqrt{3}\right)^2-2\left(d\sqrt{3}\right)\left(d\sqrt{3}\right)\cos120°$; $BC^2=3d^2+3d^2+3d^2$

$BC^2=9d^2 \Rightarrow BC=3d$

166. Дано: $\alpha \not\perp \beta$; $\alpha\cap\beta=MN$, $AB \perp MN$, $AB \in \beta$, $AC \perp \alpha$; Доказать: $\angle ABC$ – линейный

Доказательство:

1) Рассмотрим ΔACB: $CA \perp \alpha \Rightarrow CA \perp CB$

$AB \perp MN$ (по условию) $\Rightarrow CB \perp MN$

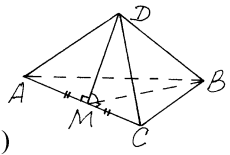
(по теореме о трех перпендикулярах).

Таким образом, имеем:

$B \in MN$ (общее ребро плоскостей α и β); $BA \perp MN$, $BA \in \beta$

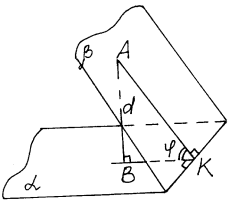
$BC \perp MN$, $BC \in \alpha \Rightarrow \angle ABC$ – линейный угол двугранного угла AMNC

167. Дано: ABCD – правильный тетраэдр,
M ∈ AC, AM=MC;
Доказать: ∠DMB – линейный
Доказательство:



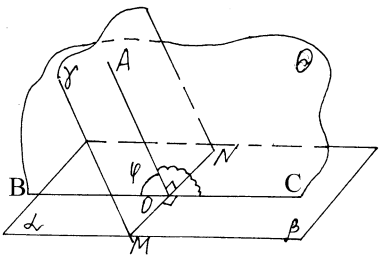
1)BM⊥AC (как высота равнобедренного ΔABC)
DM⊥AC (как высота равнобедренного ΔADC)
M ∈ AC – общее ребро двугранного угла DACB ⇒ ∠DMB – линейный угол угла DACB

168. Дано: ∠AKB=φ, AB⊥α, AB=d
Найти: AK – ?; Решение: ΔAKB:



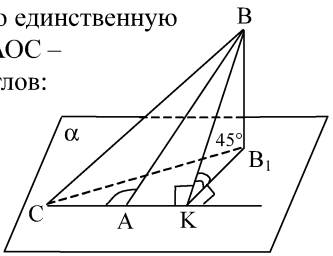
$$\left.\begin{array}{l}\angle B = 90^0\\ \angle K = \varphi\\ AB = d\end{array}\right| \to AK = \frac{AB}{\sin K} = \frac{d}{\sin\varphi}$$

169. Дано: AMNB и AMNC
Доказать: ∠BOA+∠AOC=180°
Доказательство:



∠BOA – линейный угол двугранного угла ANMB.
∠AOC – линейный угол двугранного угла ANMC.
OC, OB – дополняющие друг друга лучи, лежащие на одной прямой BC.
AO∩BC=O – определяют некоторую единственную плоскость Θ, в которой: ∠AOB и ∠AOC – смежные, а по свойству смежных углов:
∠AOB+∠AOC=180°, чтд

170. Дано: ΔABC, AC ∈ α,
BB_1⊥α, ∠BKB_1=45°; AB=2 см,
∠BAC=150°; Найти: BB_1 и BK – ?
Решение: 1) ΔABK: ∠K = 90°

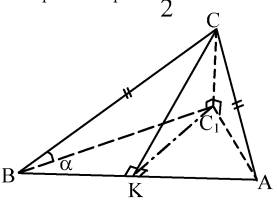


∠A=180°–150°=30°; AB=2 ⇒ BK=$\frac{1}{2}$AB=$\frac{1}{2}$·2=1см.

2)ΔBB_1K: $\left.\begin{array}{l}\angle B_1 = 90^0\\ \angle K = 45^0\end{array}\right| \to KB_1 = BB_1;\ BK^2 = KB_1^2 + BB_1^2$

$$BK^2 = x^2 + x^2;\ 2x^2 = 1;\ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2};\ KB_1 = BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ см$$

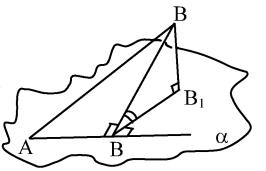
171. Дано: ΔABC, ∠C=90°,
AC=BC, AB ∈ α, ∠CBC_1=∠CAC_1=30°
Найти: ∠CKC_1 – ?; Решение:
1) Пусть BC=AC=a, тогда AB=a$\sqrt{2}$



CK⊥AB, CK=$\frac{1}{2}$AB = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

2) в ΔCC_1B: $\left.\begin{array}{l}\angle C = 90^0\\ \angle B = 30^0\end{array}\right| \to CC_1 = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$

3) в ΔCKC_1: $\left.\begin{array}{l}\angle C = 90^\circ\\ CC_1 = \frac{1}{2}a\\ CK = \frac{a\sqrt{2}}{2}\end{array}\right| \to \sin\angle CKC_1 = \frac{CC_1}{CK}$



$\sin\angle CKC_1 = \frac{1}{2}a : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\angle CKC_1 = 45^0$

172. Дано: ΔABC, $\angle C=90°$, $AC \in \alpha$, $\angle BCB_1 = 60°$, AC=5 см, AB=13 см

Найти: BB_1 – ?; Решение:

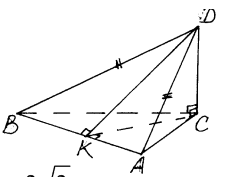
1) ΔABC: $\left.\begin{array}{l}\angle C = 90^0\\ AC = 5\text{см}\\ AB = 13\text{см}\end{array}\right| \to BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$; BC=12 см

2) ΔBB_1C: $\left.\begin{array}{l}\angle B_1 = 90^0\\ \angle C = 60^0\\ BC = 12\text{см}\end{array}\right| \to BB_1 = BC \cdot \sin C$

$BB_1 = 12\sin 60^0 = 6\sqrt{3}$см

173. Дано: ABCD – тетраэдр, $CD\perp(ABC)$, AB=BC=AC=6; $BD = 3\sqrt{7}$

Найти: DACB, DABC, BDCA – ?



Решение:

1) $CK = \sqrt{AC^2 - AK^2}$; $CK = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

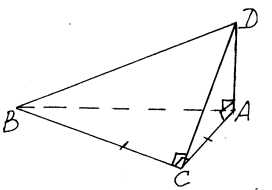
$DK = \sqrt{AD^2 - KA^2} = \sqrt{63-9} = 3\sqrt{6}$

$\cos\angle DKC = \frac{KC}{KD} \Rightarrow \cos\angle DKC = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\angle DKC = 45^0$

– линейный угол двугранного угла DABC

2) $\angle DACB = 90°$, т.к. $(ACD)\perp(ABC)$; $\angle ACB=60°$ – линейный угол двугранного угла BDCA

174. Дано: ABCD – тетраэдр, $\angle DAB=\angle DAC=\angle ACB=90°$, AC=CB=5; $DB = 5\sqrt{5}$; Найти: $\angle DCA$ – ?



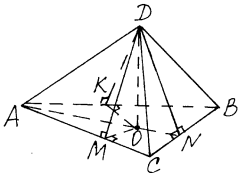
Решение:

1) ΔACB : $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5\sqrt{2}$

2) ΔBDA : $DA = \sqrt{BD^2 - BA^2} = \sqrt{125-50} = 5\sqrt{3}$

3) $\triangle ADC$: $tg\angle ACD = \frac{AD}{AC}$; $tg\angle ACD = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$; $\angle ACD = 60^\circ$

175. Дано: ABCD – правильный тетраэдр
Доказать: что все двугранные углы равны, найти их. Доказательство:



1) Т.к. тетраэдр правильный, то DO⊥(ABC). O – центр окружности, вписанной в ΔABC, а значит, OM=ON=OK= r – радиус этой окружности.
ΔMDO=ΔDNO=ΔDKO (по катетам, OD – общий, MO=OK=ON= r)
Значит, ∠DMO=∠DNO=∠DKO – линейные углы двугранных углов DACB, DCBA, DBAC, чтд

2) из ΔDMB: $DM = BM = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$; BC = DB

Затем по теореме косинусов имеем:

$DB^2 = DM^2 + BM^2 - 2DB \cdot BM \cdot \cos\angle DMB$ или

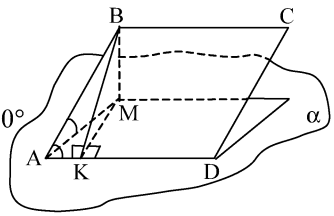
$$BC^2 = \left(BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cos\angle DMB$$

$$BC^2 = 2 \cdot \left(BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cos\angle DMB$$

$$\cos\angle DMB = \frac{2\left(BC\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - BC^2}{2\left(BC\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{BC^2\left(2\cdot\frac{3}{4} - 1\right)}{2\cdot\frac{3}{4}\cdot BC^2} = \frac{1}{3};$$ т.е.

$\cos\angle DMB = \frac{1}{3}$; $\angle DMB = 70^0\ 32'$

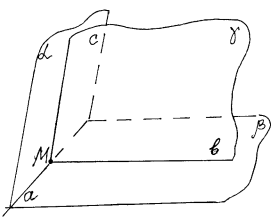
176. Дано: ABCD – ромб, ∠BAD=45°, BM⊥(ADM), ∠BADM=60°, $BM = 4\sqrt{3}$;Найти: AB – ?; Решение:



$$1)\ \Delta BMK\ : \left.\begin{array}{l} \angle M = 90^0 \\ \angle K = 60^0 \\ BM = 4\sqrt{3} \end{array}\right| \to BK = \frac{BM}{\sin 60^0} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8$$

$$2)\ \Delta ABK\ : \left.\begin{array}{l} \angle K = 90^0 \\ \angle A = 45^0 \\ BK = 8 \end{array}\right| \to AB = \frac{BK}{\sin 45^0} = 8\sqrt{2}$$

177. Дано: α∩β=a, a⊥γ
Доказать: α⊥γ, β⊥γ



1)
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \gamma = c \\ \beta \cap \gamma = b \\ a \perp \gamma \end{array}\right| \to a \perp c,\ a \perp b$$

Получили, что плоскость γ пересекает α и β по прямым, перпендикулярным линии их пересечения, значит, $\alpha\perp\beta$. Таким образом, линейный угол двугранного угла (α,β) – прямой, т.е. $c\perp b$.

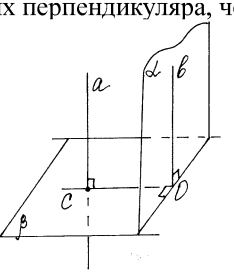
2) Отсюда: $\left.\begin{array}{l} c\perp a(\text{из } 1) \\ a\perp b(\text{из } 1) \\ c\cap b\in\beta \end{array}\right| \to a\perp\gamma$, т.к. $a\in\alpha$, то $\alpha\perp\gamma$

Аналогично: $a\perp\gamma$, т.к. $a\in\beta$, то $\beta\perp\gamma$

179. Дано: $\alpha\perp\beta$, $A\in\alpha$, $A\in a$, $a\perp\beta$; Доказать: $a\in\alpha$

Доказательство: 1) Пусть $a\notin\alpha$, тогда $a\cap\alpha=A$

2) Тогда $a\,||\,\beta$ или $a\cap\beta$ под каким–то углом. $a\,||\,\beta$ – противоречит условию $a\perp\beta$. Если $a\cap\beta$ под углом 90°, то получим, что через одну точку к плоскости опущено два различных перпендикуляра, чего не может быть. Значит, $a\in\alpha$, чтд



180. Дано: a, α, $a\notin\alpha$, $a\perp\beta$, $\alpha\perp\beta$

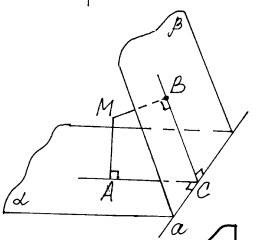
Доказать: $a\,||\,\alpha$

Доказательство:

Т.к. $\alpha\perp\beta$, то $b\perp c$; $a\perp\beta$, то $a\perp c \Rightarrow a\,||\,b$

Т.к. $b\in\alpha$ и $a\,||\,b$, то $a\,||\,\alpha$, чтд

181. Дано: $\alpha\cap\beta=a$, $MA\perp\alpha$, $MB\perp\beta$, $a\cap(AMB)=C$; Доказать: $MC\perp c$



Доказательство:

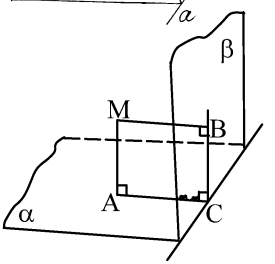
Т.к. $MB\perp\beta$, то $MB\perp BC$ и $MB\perp a$.

Т.к. $MA\perp\alpha$, то $MA\perp AC$ и $MA\perp a$.

Таким образом, $a\perp(AMB)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Т.к. $a\perp(AMB)$, то $a\perp(MC)$ по определению, чтд

182. Дано: $\alpha\perp\beta$ и $\alpha\cap\beta=a$, $MA\perp\alpha$, $MB\perp\beta$, $(AMB)\cap a=C$



Доказать: ACBM – прямоугольник

Найти: MC, если AM=m, BM=n

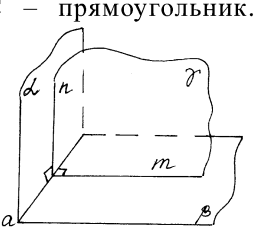
Т.к. $MA\perp AC$ (по условию)

$BC\perp AC$ (по условию) $\Rightarrow AM\,||\,BC$

Аналогично, $AC\,||\,MB$, следовательно, AMBC – параллелограмм, но $\angle C=90°$ (по условию). Значит, AMBC – прямоугольник.

$MC=\sqrt{MB^2+BC^2}=\sqrt{m^2+n^2}$

183. Дано: $\alpha\cap\beta=a$, $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$



Доказать: $a\perp\gamma$; Доказательство:

$\alpha\perp\gamma$, значит, $m\perp n$, $m\perp a$, где n, $a\in\alpha$

$\beta\perp\gamma$, значит, $n\perp m$, $n\perp a$, где m, $a\in\beta$

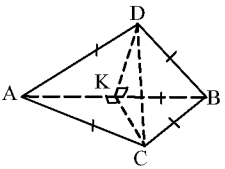
Таким образом, $a\perp n$, $a\perp m$, где m, $n\in\gamma$, $a\in\gamma$ чтд

184. Дано: (ABC) ⊥(ABD), AB=10 см

Найти: CD, если:

а) ΔABC=ΔABD – равносторонние

б) ΔABC=ΔABD – прямоугольные, равнобедренные с гипотинузой AB;



Решение: $DK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; Т.к.AB=a=10 см, то DK=5 $\sqrt{3}$ и CK=5 $\sqrt{3}$ см.

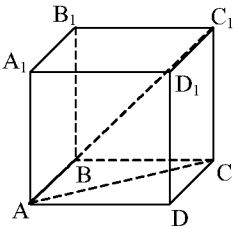
ΔDKC: ∠K=90°; DK=KC=5 $\sqrt{3}$, отсюда: $DC = DK\sqrt{2}$; $DC = 5\sqrt{6}$

б) Если ΔADB – равнобедр. с гипотен. AB, то DK=5 см и KC=5 см, отсюда DC=5 $\sqrt{2}$ см.

187. $а) AC_1 = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}\,см$; $б) AC_1 = \sqrt{64+81+144} = 17\,см$

$в) AC_1 = \sqrt{39+49+81} = 13\,см$

188. Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром a, то $AC_1 = \sqrt{a^2+a^2+a^2} = a\sqrt{3}$.



189. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб,

AC_1= d; AC = m.

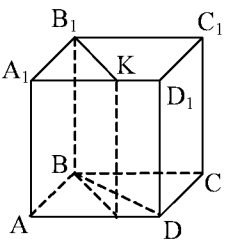
Найти: расстояние от вершины куба до любой его грани, в которой не лежит эта вершина

Решение: а) ΔACD $AC^2 = AD^2 + DC^2$; $AC^2 = 2AD^2$;

$$AD = \sqrt{\frac{AC^2}{2}} = \sqrt{\frac{m^2}{2}} = \frac{m\sqrt{2}}{2}$$

б) $AC_1^2 = AD^2 + DC^2 + DD_1^2$; $AC_1^2 = 3AD^2$;

$$AD = \sqrt{\frac{AC_1^2}{3}} = \sqrt{\frac{d^2}{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3}$$



190. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

Найти углы; Решение: а) ABB_1C=90°

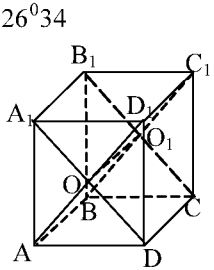
б) ADD_1B=45°; в) A_1BB_1K=∠ A_1B_1K

$$tg\angle A_1B_1K\,\frac{A_1K}{A_1B_1};\ tg\angle A_1B_1K = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2};\ A_1BB_1K \approx 26^0 34$$

191. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

Доказать: $(ABC_1)\perp(A_1B_1D)$

Доказательство: $\angle A_1OD_1$ – линейный угол, образованный плоскостями (ABC_1) и (A_1B_1D).



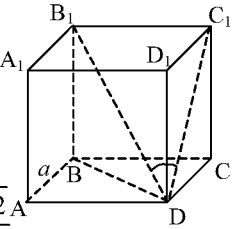
$\angle A_1OD_1$=90° (свойство диагоналей квадратов).

Значит, $(ABC_1)\perp(A_1B_1D)$ по определению.

192. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

Найти: $tg\angle B_1DC_1$ – ?

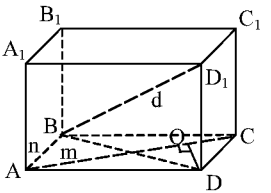
Решение: Пусть AB=a, тогда:



$$DC_1 = a\sqrt{2}, B_1D = a\sqrt{3}$$

$$\Delta B_1DC_1 : \left.\begin{array}{l} \angle C_1 = 90^\circ \\ DC_1 = a\sqrt{2} \\ B_1D = a\sqrt{3} \\ B_1C_1 = a \end{array}\right| \to tgD = \frac{B_1C_1}{DC_1} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

193. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, D_1B=d, AC=m, AB=n; Найти:



а) расстояние между A_1C_1 и (ABC)

Это расстояние равноDD_1:

$$DD_1 = \sqrt{BD_1{}^2 - BD^2} = \sqrt{d^2 - m^2}$$

б) расстояние между (ABB_1) и (DCC_1) Это расстояние равно AD:

$$AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{m^2 - n^2}$$

в) от прямой DD_1 до (ACC_1). Это расстояние равно DO:

$DO^2=AD^2–AO^2$; $DO^2=DC^2–OC^2$; $AD^2–AO^2=DC^2–OC^2$

$m^2–n^2–AO^2=n^2–(m–AO)^2$; $m^2–n^2–AO^2=n^2–m^2+2mAO–AO^2$

$2mAO=2m^2–2n^2$;

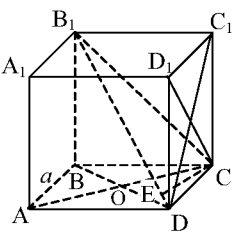
$$AO = \frac{m^2 - n^2}{m} \Rightarrow DO^2 = m^2 - n^2 - \frac{(m^2 - n^2)^2}{m^2}$$

$$DO^2 = \frac{m^4 - m^2n^2 - m^4 + 2m^2n^2 - n^4}{m^2}$$

$$DO^2 = \frac{m^2n^2 - n^4}{m^2}; DO = \frac{n\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$$

194. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, AB=a

Найти: а) расстояние между B_1D и CC_1



Это то же самое, что расстояние от C до BD,

т.е. CO; $CO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

б) расстояние между B_1D и D_1C

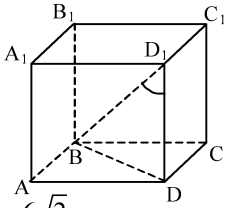
Это то же самое, что расстояние от C до B_1D, т.е. CE

CD=a; $B_1D = a\sqrt{3}$; $B_1C = a\sqrt{2}$; $CE^2=CD^2–ED^2$; $CE^2=B_1C^2–B_1E^2$

$CD^2–ED^2=B_1C^2 – B_1E^2$; $a^2–ED^2=2a^2–(3a^2–2a\sqrt{3}ED+ED^2)$

$2a\sqrt{3}ED=2a^2$; $ED = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CE^2 = a^2 - \frac{a^2}{3}; CE = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

195. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, AC_1=12 см, $\angle BD_1D$=45°, $\angle AD_1B$=30°
Найти: AB, AD, AA_1 – ?;
Решение:

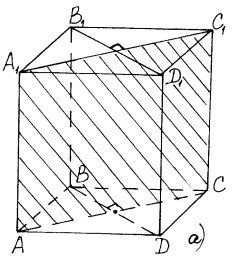


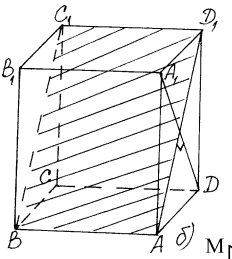
$$\Delta BDD_1: \left.\begin{matrix}\angle D = 90^\circ \\ \angle D_1 = 45^\circ\end{matrix}\right| \to BD = DD_1 = 12 \cdot \sin 45^0 = 6\sqrt{2}\ \ см$$

$$\Delta AD_1B: \left.\begin{matrix}\angle A = 90^\circ \\ \angle D_1 = 30^\circ \\ BD_1 = 12\,см\end{matrix}\right| \to AB = \frac{1}{2}BD_1 = 6\,см$$

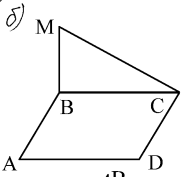
$$\Delta ABD: \left.\begin{matrix}\angle A = 90^\circ \\ AB = 6\,см \\ BD = 6\sqrt{2}\,см\end{matrix}\right| \to AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = 6\,см$$

196.

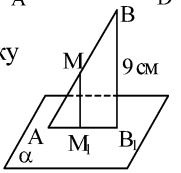




197. Дано: ABCD – прямоугольник, BM⊥(ABC); Доказать: CD⊥(MBC)



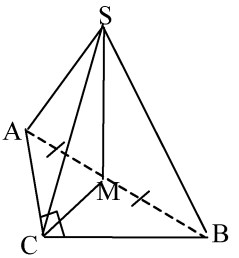
Доказательство:
BC⊥DC (т.к. ABCD – прямоугольник)
DC⊥MC (по теореме о трех перпендикулярах)
BC∩MC=C ∈ (BMC) ⇒ DC⊥(BMC) по признаку перпендикулярности прямой и плоскости



198. Дано: A ∈ α, BB_1⊥α, BB_1=9 см, M ∈ AB, AM:MB=4:5, MM_1⊥α
Найти: MM_1 – ? Решение:
$\Delta AMM_1 \sim \Delta ABB_1$ (по двум углам)

$$\frac{MM_1}{BB_1} = \frac{AM}{AB};\ \frac{MM_1}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow MM_1 = 4\ см$$

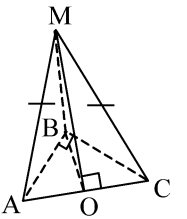
199. Дано: ΔABC, ∠C=90°, S ∉ (ABC) и AS=SB=SC, M∈AB, AM=MB
Доказать: SM⊥(ABC) Док–во:



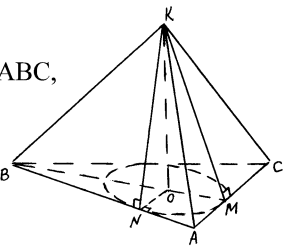
Рассмотрим ΔASM, ΔCSM и ΔMSB
AS=CS=BS (по условию); AM=MC=MB (по условию); SM – общая;
ΔASM=ΔCSM=ΔMSB (по трем сторонам) ⇒ ∠AMS=∠BMS=∠CMS;
ΔASB – равнобедренный, SM⊥AB (св–во медианы).
Значит ∠AMS=∠BMS=∠CMS=90°, т.е. SM⊥(ABC)

200. Дано: многоугольник вписан в окр(O;R), M $\in l$, O $\in l$, $l \perp$ Окр.
Доказать: AM=BM=...=CM; Доказательство:
ΔAMO, ΔBOM и ΔMOC; MO – общая; AO=OB=OC=R ⇒
⇒ ΔAOM=ΔBOM=ΔCOM (по двум катетам) ⇒ AM=BM=CM

201. Параллельным переносом PQ→P_1Q_1; P_1Q_1∩AB=O
Т.к. PA=PB, QA=QB, то $P_1A=P_1B$, $Q_1A=Q_1B$, значит, P_1Q_1 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB,
т.е. $P_1Q_1 \perp AB$, значит, PQ⊥AB.



202. Дано: ΔABC, ∠B=90°, M $\notin$ (ABC),
AM=CM=BM=10 см, CO=5 см
Найти: MO – ? Решение:
O – центр окружности, описанной около ΔABC.
ΔMOC: ∠O=90°; OC=5 см; MC=10 см ⇒
$MO = 5\sqrt{3}$ см

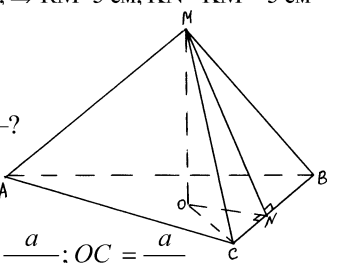


203. Дано: ΔABC, OK⊥(ABC),
O – центр окружности, вписанной в ΔABC,
AB=BC=10 см, AC = 12 см, OK = 4 см
Найти: KM, KN – ? Решение:
AB=10 см, AM=6 см, BM=8 см
ΔABM ~ ΔOBN (по двум углам)

$$\frac{AM}{ON} = \frac{AB}{OB}; \frac{6}{r} = \frac{10}{8-r}; 6(8-r) = 10r; 48 = 16r \Rightarrow r = 3\,см$$

2) ΔKOM: ∠O=90°; OM=3 см; OK=4 см; ⇒ KM=5 см; KN= KM = 5 см

204. Дано: ΔABC – правильный,
OM�perp(ABC), OM=a, ∠MCO=φ
Найти:
а) MA, MB, MC и MK, MN, ME, S_Δ–?
Т.к. ΔABC – правильный, то
AM=BM=CM и KM=NM=EM



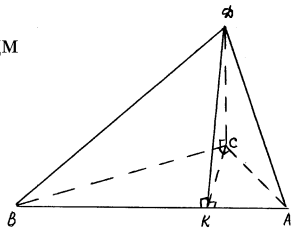
ΔMOC: $\left.\begin{array}{l}\angle O = 90^\circ \\ \angle C = \varphi \\ OM = a\end{array}\right| \rightarrow MC = \frac{MO}{\sin C} = \frac{a}{\sin\varphi}; OC = \frac{a}{tg\varphi}$ –
радиус окружности, описанной около ΔABC.
Т.к. ΔABC – правильный, то $ON = \frac{1}{2}OC$; $ON = \frac{a}{2tg\varphi}$; тогда

из ΔMON: $\left.\begin{array}{l}\angle O = 90^\circ \\ OM = a \\ ON = \frac{a}{2tg\varphi}\end{array}\right| \rightarrow MN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4tg^2\varphi}} = \frac{a\sqrt{4tg^2\varphi + 1}}{2tg\varphi}$

б) Длину описанной окружности C=2πR; $C = \frac{2\pi a}{tg\varphi}$

в) $S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$; $AB = \frac{a\sqrt{3}}{tg\varphi}$; $S = \frac{3\sqrt{3}\cdot a^2}{4tg^2\varphi}$

205. Дано: ΔABC, ∠C=90°,
CD⊥(ABC); AC=3 дм, CB=2 дм, CD=1 дм
Найти: S_{ABD} – ? Решение:



$1)\, AB = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\ дм;\ 2)\, CK \perp AB,$

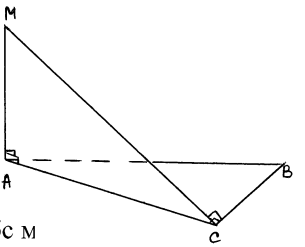
ΔABC ~ ΔACK (по двум углам)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CK};\ \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{2}{CK} \Rightarrow CK = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

$$3)\, DK \perp AB,\ DK = \sqrt{DC^2 + KC^2};\ DK = \sqrt{1 + \frac{36}{13}} = \sqrt{\frac{49}{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

$$4)\, S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DK;\ S_{ABD} = \frac{1}{2}\sqrt{13} \cdot \frac{7\sqrt{13}}{13} = 3{,}5\ дм^2$$

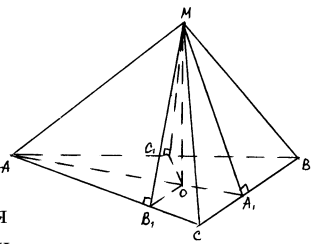
206. Дано: ΔABC, AB=17 см, AC=15 см,
BC=8 см, AM⊥(ABC), AM=20 см
Найти: MC – ? Решение:



1) ΔABC: $15^2+8^2=17^2$, т.е.
ΔABC – прямоугольный, ∠C=90°
2) ΔMAC:

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = 90^\circ \\ AC = 15\text{ см} \\ AM = 20\text{ см} \end{array}\right| \rightarrow MC = \sqrt{225+400} = 25\text{ см}$$

207. Дано: ΔABC, AB=BC=13 см,
AC=10 см, $MA_1=MB_1=MC_1=8\frac{2}{3}$ см,
$MA_1 \perp BC$, $MB_1 \perp AC$, $MC_1 \perp AB$
Найти: MO – ? Решение:



1) Т.к. $MA_1=MB_1=MC_1$, то проекция точки M лежит в центре окружности, вписанной в ΔABC. Найдем ее радиус.
AB=13 см, AB_1=5 см, BB_1=12 см; $\Delta ABB_1 \sim \Delta OBC_1$ (по двум углам)

$$\frac{AB_1}{OC_1} = \frac{AB}{OB};\ \frac{5}{r} = \frac{13}{12-r};\ 5(12-r) = 13r;\ 60 = 18r \Rightarrow r = 3\frac{1}{3}\ см$$

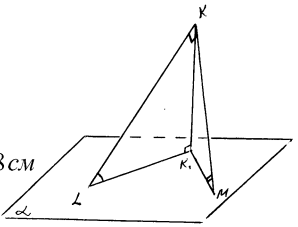
2) Рассмотрим ΔMOA_1:

$$\left.\begin{array}{l} \angle O = 90^\circ \\ OA_1 = 3\frac{1}{3}\text{ см} \\ MA_1 = 8\frac{2}{3}\text{ см} \end{array}\right| \rightarrow MO = \sqrt{MA_1^2 - OA_1^2}$$

$$MO = \sqrt{\left(8\frac{2}{3}\right)^2 - \left(3\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{12 \cdot 5\frac{1}{3}} = \sqrt{64} = 8\text{ см}$$

208. Дано: $KK_1 \perp \alpha$, KK_1=9 см, KL, KM – наклонные, $\angle LKM=90°$, $\angle KLK_1=45°$, $\angle KMK_1=30°$; Найти: LM – ?

Решение:

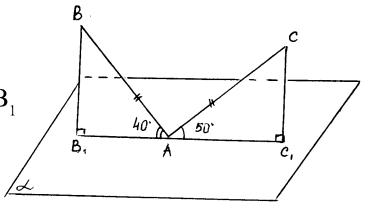


$$1)\,\Delta KK_1L:\left.\begin{matrix}\angle K_1=90°\\ \angle L=45°\end{matrix}\right|\to KL=9\sqrt{2}\,см$$

$$2)\,\Delta K_1KM:\left.\begin{matrix}\angle K_1=90°\\ \angle M=30°\end{matrix}\right|\to KM=\frac{9}{\sin 30°}=18\,см$$

$3)\,\Delta LKM$:

$$\left.\begin{matrix}\angle K=90°\\ LK=9\sqrt{2}\,см\\ KM=18\,см\end{matrix}\right|\to LM=\sqrt{LK^2+KM^2}=\sqrt{324+162}=\sqrt{486}=9\sqrt{6}\,см$$



209. Дано: AB=AC, $\angle BAB_1=40°$, $\angle CAC_1=50°$; Сравнить: CC_1 и BB_1

Решение:

1) Из ΔBB_1A: $BB_1=BA \cdot \sin 40°$

ΔCC_1A: $CC_1=AC \cdot \sin 50°$

Т.к. BA=AC, то сравним sin40° и sin50°.

50°>40°, значит sin50°>sin40°, отсюда $CC_1>BB_1$, т.е. точка C удалена от плоскости дальше, чем B.

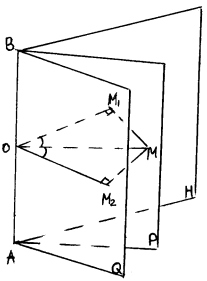
210. Дано: HABP=PABQ, M ∈ (ABP), $MM_1 \perp (ABH)$, $MM_2 \perp (ABQ)$

Доказать: $MM_1=MM_2$; Доказательство:

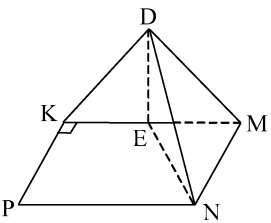
Рассмотрим ΔOMM_1 и ΔOMM_2

OM – общая; $\angle M_1OM=\angle M_2OM$ (по условию) $\Rightarrow \Delta OMM_1=\Delta OMM_2$ по гипотенузе и острому углу

Значит, $MM_1=MM_2$, чтд



211. Дано: (KDM)⊥(KMNP), KMNP - квадрат, ΔKDM - правильный, KM=a; Найти: DN - ? Решение:

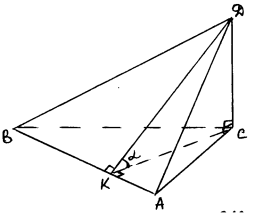


$$1)\,DE\perp KM,\,DE=\frac{a\sqrt{3}}{2};\,2)\,\Delta DEN:$$

$$\left.\begin{matrix}\angle E=90°\\ DE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\\ EN=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\end{matrix}\right|\to DN=\sqrt{DE^2+EN^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{5a^2}{4}}=a\sqrt{2}$$

212. Дано: ΔABC, $DC\perp(ABC)$, $S_{ABC} = S$,

$\angle DKC=\alpha$; Доказать: $S_{ABD} = \dfrac{S}{\cos\alpha}$



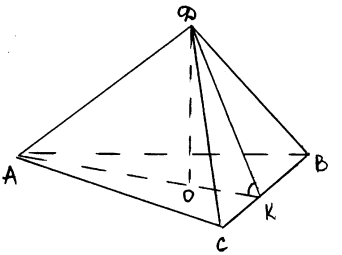
Доказательство: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BA\cdot KC$;

$S_{ABD} = \dfrac{1}{2}BA\cdot DK$ Но $DK = \dfrac{KC}{\cos\alpha}$, значит,

$S_{ABD} = \dfrac{1}{2}BA\cdot\dfrac{KC}{\cos\alpha} = \dfrac{S}{\cos\alpha}$, чтд.

213. Дано: ΔABC и ΔDCB – правильные, $DO\perp(ABC)$,

O - центр; Найти: $\angle AKD$ - ?



Решение: 1) Т.к. ΔABC и ΔCDB – правильные, то

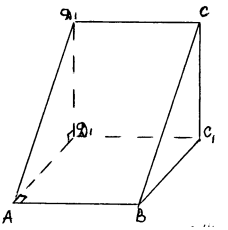
$AK = DK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; OK = \dfrac{1}{3}AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$$2)\Delta DOK:\left.\begin{array}{l}\angle O = 90^\circ\\ OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\\ DK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\end{array}\right|\to \cos\angle K = \frac{OK}{DK} = \frac{a\sqrt{3}}{6}:\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}; K = \arccos\frac{1}{3}$$

$\angle K\approx 70^\circ 33'$

214. Дано: ABCD - прямоугольник, ABC_1D_1 - квадрат, AB:BC=1:2

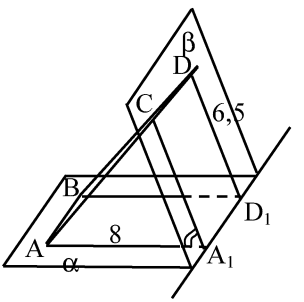
Найти: $\angle DAD_1$ – ? Решение:



$$\Delta ADD_1:\left.\begin{array}{l}\angle D_1 = 90^\circ\\ AD_1 = 1\\ AD = 2\end{array}\right|\to \cos\angle DAD_1 = \frac{AD_1}{AD} = \frac{1}{2}; \angle DAD_1 = 60^\circ$$

215. Дано: двугранный угол, равный 60°, AB || CD, $AB\in\alpha$, $CD\in\beta$, $\alpha\cap\beta=a$, $AA_1\perp a$, $AA_1=8$ см, $DD_1\perp a$, $DD_1=6{,}5$ см

Найти: расстояние между AB и CD



Решение: $CA_1\perp A_1D_1$; $DD_1\perp A_1D_1$;

т.е. $\angle CA_1A = \angle DD_1B = 60^\circ$

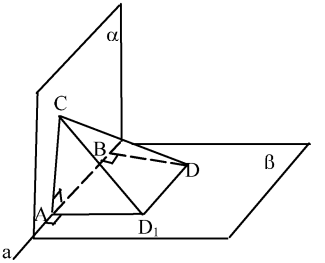
ΔCA_1A: (по теореме косинусов)

$AC^2 = CA_1^2 + AA_1^2 - 2CA_1\cdot AA_1\cdot\cos 60^\circ =$

$= \sqrt{8^2 + 6{,}5^2 - 2\cdot 8\cdot 6{,}5\cdot 0{,}5} = \dfrac{\sqrt{217}}{2}$; AC = BD

216. Дано: двугранный угол, равный 120°, $\alpha \cap \beta = a$; $A, B \in a$, $AC \perp a$, $AC \in \alpha$, $BD \perp a$, $BD \in \beta$, $AB = AC = BD = a$

Найти: CD – ?



1) Проведем $DD_1 \| AB$; $AD_1 \| BD$, тогда $AD_1 = DD_1 = a$

2) ΔCAD_1: по теореме синусов

$$\frac{CD_1}{\sin 120°} = \frac{AC}{\sin 30°}; \frac{CD_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\frac{1}{2}} \Rightarrow CD_1 = a\sqrt{3}$$

$$3)\ \Delta CD_1D: \left.\begin{matrix} \angle D = 90° \\ CD_1 = a\sqrt{3} \\ DD_1 = a \end{matrix}\right| \rightarrow CD = \sqrt{CD_1^2 + DD_1^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

217. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед, $S_{ABCD} + S_{AA_1D_1D} + S_{A_1ABB_1} = 404$ дм^2, $AB:AD:AA_1 = 3:7:8$; Найти: A_1C - ?

Решение: 1) Пусть $AB = 3x$, $AD = 7x$, $AA_1 = 8x$, тогда

$21x^2 + 56x^2 + 24x^2 = 404$; $101x^2 = 404$; $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

Отсюда: $AB = 6$ дм, $AD = 14$ дм, $AA_1 = 16$ дм.

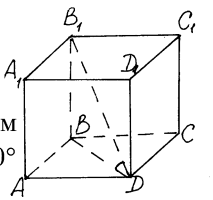
$$2) A_1C = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2} = \sqrt{36 + 196 + 256} = \sqrt{488} = 2\sqrt{122} \text{ дм}$$

Глава III
Многогранники

218. а) Прямая призма – призма, боковые рёбра которой перпендикулярны основанию. Т.к. боковые грани призмы – параллелограммы, то в этом случае параллелограмм с прямым углом – прямоугольник.

б) Если призма правильная, то в основании правильный многоугольник. Значит все боковые грани равные прямоугольники, одна сторона – это высота призмы, а другая – сторона основания многоугольника.

219. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AB = 12$ см, $AD = 5$ см, $\angle BDB_1 = 45°$; Найти: AA_1 – ?; Решение:

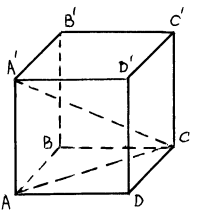


1) ΔABD: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см

2) ΔBB_1D: $BB_1 = BD = 13$ см, т.к. $\angle D = 45°$, $\angle B = 90°$ т.е. ΔBB_1D – равнобедренный.

220. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, ABCD – ромб, $AC = 24$ см, $BD = 10$ см, $AA_1 = 10$ см

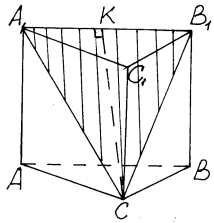
Найти: A_1C – ? Решение:



ΔAA_1C : $\angle A = 90°$, $AC = 24$; $AA_1 = 10 \rightarrow$

$\rightarrow A_1C = \sqrt{AC^2 + AA_1^2} = \sqrt{576 + 100} = 26$ см.

221. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма, $AB=8$ см, $AA_1=6$ см; Найти: $S_{A_1B_1C}$ – ?



Решение:

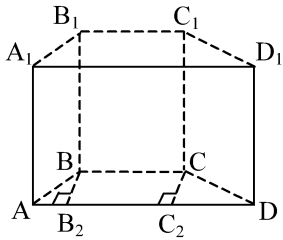
1) т.к. призма правильная, то $A_1C=B_1C$;

$A_1C=\sqrt{AA_1^2+AC^2}=\sqrt{36+64}=10$ см

2) $S_{A_1B_1C}=\frac{1}{2}A_1B_1\cdot CK$

$CK=\sqrt{A_1C^2-A_1K}=\sqrt{100-16}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$ см

отсюда: $S_{A_1B_1C}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 2\sqrt{21}=8\sqrt{21}$ см^2



222. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $AD=25$ см, $BC=9$ см, $BB_2\perp AD$, $BB_2=8$см

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$

Решение:1) Рассмотрим равнобедренную трапецию ABCD:

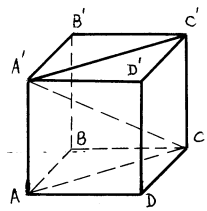
$BC=B_2C_2=9 \Rightarrow AB_2=C_2D=\frac{1}{2}(AD-B_2C_2)=\frac{1}{2}(25-9)$; $AB_2=C_2D=8$ см

2) $\Delta ABB_2=\Delta CDC_2$ (по двум катетам)

в ΔABB_2: $\angle B_2=90°$; $AB_2=BB_2=8$ см; $\rightarrow \angle A=45°$; $\angle BAD=\angle CDA=45°$ – линейные углы двугранных углов B_1A_1AD и C_1D_1DA

3) $\angle ABC=\angle DCB=135°$ – линейные углы двугранных углов ABB_1C_1 и B_1C_1CD

223. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $S_{AA_1C_1C}=64\sqrt{2}$ см^2; Найти: AA_1 и CA_1



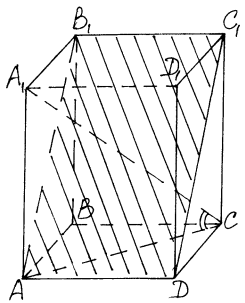
Решение: 1) Пусть $AA_1=x$, тогда $AC=x\sqrt{2}$; $S_{AA_1C_1C}=AA_1\cdot AC$ см;

$64\sqrt{2}=x\cdot x\sqrt{2}$; $x^2=64$; $x=8$ см

2) ΔAA_1C : $A_1C=\sqrt{64+64\cdot 2}=8\sqrt{3}$;

$A_1C=\sqrt{64+64\cdot 2}=8\sqrt{3}$ см

224. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма, $\angle A_1CA=60°$, $AC=4\sqrt{2}$;



Найти: $S_{AB_1C_1D}$ – ? Решение:

1) ΔAA_1C : $\angle A=90°$; $\angle C=60°$; $AC=4\sqrt{2}\rightarrow$

$\rightarrow AA_1=ACtg60°$; $AA_1=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{6}$ см

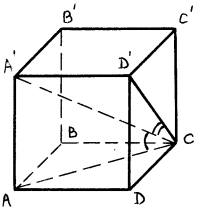
2) т.к. ABCD – квадрат и $AC=4\sqrt{2}$ см, то $AD=DC=4$ см

3) ΔAB_1B : $\angle B=90°$; $BB_1=4\sqrt{6}$ см; $AB=4$ см$\rightarrow AB_1=\sqrt{BB_1^2+AB^2}$

$AB_1=\sqrt{96+16}=4\sqrt{7}$ см

4) AB_1C_1D – прямоугольник, т.к. $BB_1 \perp AB$; $AB \perp AD$; $B_1A \perp AD$ (по т. 3х перпенд.); $S_{AB_1C_1D} = AD \cdot AB_1$; $S_{AB_1C_1D} = 4 \cdot 4\sqrt{7} = 16\sqrt{7}$ см²

225. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма, $\angle A_1CD_1 = 30°$



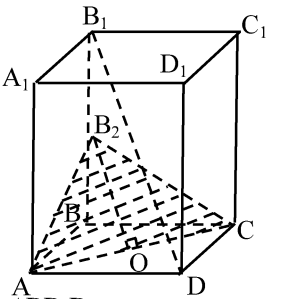
Найти: $\angle ACA_1$ Решение:

1) Пусть AB=a; в ΔA_1D_1C : $\angle D_1 = 90°$; $\angle C = 30°$; $A_1D_1 = a$; $\rightarrow A_1C = 2A_1D_1$; $A_1C = 2a$

2) ΔAA_1C : $\angle A = 90°$; $A_1C = 2a$; $AC = a\sqrt{2} \rightarrow$

$\rightarrow \cos\angle ACA_1 = \frac{AC}{A_1C} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\angle ACA_1 = 45°$

226. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма, $B_1D \| (AB_2C)$, AB=2 см, AA_1=4 см



Найти: S_{AB_2C} – ? Решение:

1) $S_{AB_2C} = \frac{1}{2} AC \cdot B_2O$; $AC = AB\sqrt{2}$,

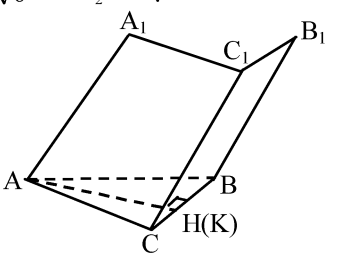
т.к. AB=2 см, то $AC = 2\sqrt{2}$ см

2) $B_2O \| B_1D$ и $B_2O = \frac{1}{2} B_1D$ как ср. линия ΔBB_1D

$B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD_1^2} = \sqrt{16+8} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ см; $B_2O = \sqrt{6}$ см

отсюда $S_{AB_2C} = \frac{1}{2} 2\sqrt{2}\sqrt{6} = 2\sqrt{3}$ см²

227. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма, ΔABC – правильный; Доказать:



а) $BC \perp AA_1$; б) CC_1B_1B – прямоуг.

Доказательство:

1) т.к. $\angle A_1AC = \angle A_1AB$, то AH – биссектриса $\angle CAB$

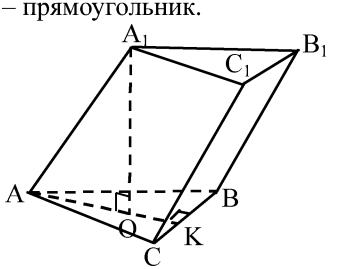
ΔABC – равносторонний, значит по свойству биссектрисы $AH \perp BC$

$AH = пр_{(ABC)} AA_1$ и $AH \perp BC$, значит $AA_1 \perp CB$ (по т. 3х перпендикуляров).

2) $AA_1 \| CC_1 \| BB_1$ (определение призмы); $AA_1 \perp CB \rightarrow$

$\rightarrow CC_1 \perp CB$ и $BB_1 \perp CB$, значит CC_1B_1B – прямоугольник.

228. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма, ΔABC: AC=AB=13 см, BC=10 см, $\angle KAA_1 = 45°$, $A_1O \perp (ABC)$, O – точка пересечения медиан



Найти $S_{CC_1B_1B}$ – ? Решение:

1) ΔABC : $AK = \sqrt{AC^2 - CK^2}$

$AK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см; т.к. O – точка пересечения медиан,

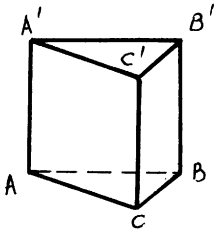
то AO : OK=2 : 1, отсюда $AO = \frac{2}{3} AK = 8$ см

2) ΔAA_1AO : $\angle O=90°$; $\angle A=45°$; $\rightarrow AO=A_1O=8$ см, $AA_1=8\sqrt{2}$ см

3) $S_{CBB_1C_1}=CB\cdot BB_1$ (прямоугольник); $S_{CBB_1C_1}=10\cdot 8\sqrt{2}=80\sqrt{2}$ см^2

229. Дано: правильная n-угольная призма, a – сторона основания, h – высота. Найти: $S_{бок}$, $S_п$ – ? Решение:

а)



<u>если n=3 ; a=10 см; h=15 см</u>

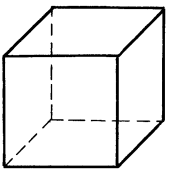
$S_{бок}=3\cdot S_{AA_1CC_1}$; $S_{бок}=3\cdot 150=450$ см^2

$S_{п.п.}=S_{бок}+2S_{осн}$

$S_{осн}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{100\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}$

$S_{п.п.}=450+50\sqrt{3}$ см$^2\approx 536$ см^2

б) <u>если n=4 ; a=12 дм; h=8 дм</u>

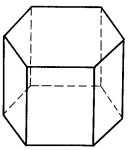


$S_{бок}=P\cdot h$

$S_{бок}=48\cdot 8=384$ дм^2

$S_{п.п.}=384+2\cdot 144=384+288=672$ дм^2

в) <u>если n=6 ; a=23 см; h=5 дм</u>

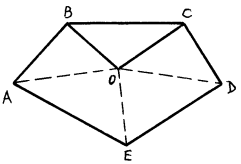


$S_{бок}=P\cdot h$; $S_{бок}=6\cdot 23\cdot 50=6900$ см$^2=69$ дм^2

$S_{осн.}=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\cdot 23^2\sqrt{3}}{2}=\frac{1587\sqrt{3}}{2}$ см$^2\approx 1374$ см^2

$S_{п.п.}=6900+2\cdot 1374\approx 9648$ дм$^2\approx 97$дм^2

г) <u>если n=5 ; a=0,4 м; h=10 см</u>



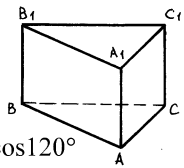
$S_{бок}=5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}1=0{,}2$ м^2; $S_{осн}=5\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h$

в ΔABO: AB=0,4 м; $\angle A=54°$; отсюда:

$\rightarrow h=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot tg54°$; $h=0{,}2\cdot 1{,}3764\approx 0{,}28$м

$S_{осн}=0{,}28$ м^2; $S_{п.п.}=S_{бок}+2\,S_{осн}$; $S_{п.п.}=0{,}2+0{,}56=0{,}76$ м^2

230. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, AB=5 см, AC=3 см, $\angle A=120°$, $S_{BCC_1B_1}=35$ см^2



Найти: $S_{бок}$ – ?; Решение:

1) ΔABC: по т. косинусов

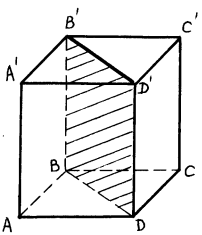
$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle A$; $BC^2=25+9-2\cdot 5\cdot 3\cos 120°$

$BC^2=34+15=49$, BC=7 см

2) $S_{BB_1C_1C}=BB_1\cdot BC$; $35=BB_1\cdot 7$; $BB_1=5$ см

3) $S_{бок}=P\cdot h$; $S_{бок}=(5+3+7)\cdot 5=15\cdot 5=75$ см^2

231. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед, AB=8 см, AD=15 см, $\angle A=60°$, $S_{BB_1D_1D}=130$ см^2; Найти: $S_{п.п.}$ – ?



Решение: 1) ΔABD: по т. косинусов

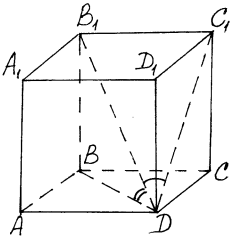
$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle A$

$BD^2=64+225-2\cdot 8\cdot 15\cdot\frac{1}{2}$; $BD^2=169\Rightarrow BD=13$ см

2) $S_{BB_1D_1D}=BB_1\cdot BD$; $130=13\cdot BB_1$; $BB_1=10$ см

3) $S_{п.п.}=S_{бок}+2S_{осн}$; $S_{п.п.}=2\cdot(8+15)\cdot10+2\cdot8\cdot15\cdot\sin60°$

$S_{п.п.}=460+120\cdot\sqrt{3}=20(23+6\sqrt{3})$ см^2



232. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $B_1D=d$, $\angle BDB_1=\varphi$, $\angle B_1DC_1=\alpha$

Найти: $S_{бок}$ – ? Решение:

1) ΔBDB_1: $BD=B_1D\cdot\cos\varphi=d\cos\varphi$

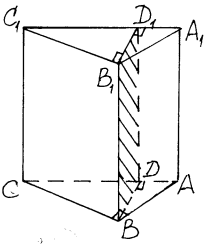
$BB_1=B_1D\cdot\sin\varphi=d\sin\varphi$

2) ΔB_1DC_1 : $B_1C_1=d\sin\alpha$, $C_1D=d\cos\alpha$;3) ΔDBA : $AB=\sqrt{BD^2-AD^2}$

$AB=\sqrt{d^2\cos^2\varphi-d^2\sin^2\alpha}=d\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha}$

$S_{бок}=P\cdot h$; $S_{бок}=2(d\sin\alpha+d\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha})d\sin\varphi$

$S_{бок}=2d^2\sin\varphi(\sin\alpha+\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha})$

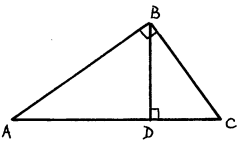


233. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямоугольная призма, ΔABC: $\angle B=90°$, $(BB_1D_1D)\perp(AA_1C_1C)$, $AA_1=10$ см, $AD=27$ см, $DC=12$ см

Найти: $S_{BDD_1B_1}$ –?; Решение:

1) $BD^2=AD\cdot DC$; как средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы

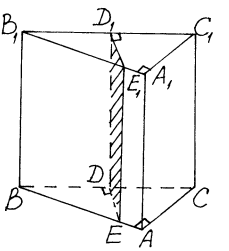
$BD^2=27\cdot12$, $BD=18$ см



2) $S_{BDD_1B_1}=BD\cdot DD_1$; $S_{BDD_1B_1}=18\cdot10=180$ см^2

234. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $AB=21$ см, $AC=20$ см, $\angle A=90°$, $AA_1=42$ см, $(D_1E_1ED)\perp(BCC_1B_1)$, $D\in BC$, $BD=BC$

Найти: $S_{DEE_1D_1}$ – ? Решение:



1) $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}$;

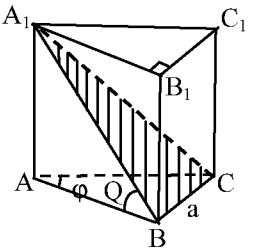
$BC=\sqrt{400+441}=29$ см

$\Delta ABC\sim\Delta DEB$; $\angle A=\angle D=90°$; $\angle$<u>B – общий</u> $\Rightarrow$ $\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{EB}=\frac{AC}{DE}$;

$DB=\frac{1}{2}BC=14{,}5$см; $\frac{20}{DE}=\frac{21}{14{,}5}\Rightarrow DE=\frac{290}{21}=13\frac{17}{21}$см

2) $S_{DEE_1D_1}=DE\cdot DD_1$; $S_{DEE_1D_1}=13\frac{17}{21}\cdot42=546+34=580$ см^2

235. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, ΔABC: $\angle B=90°$, $\angle A=\varphi$, $\angle ABA_1=Q$



Найти: $\dfrac{S_{бок}}{S_{сеч}}$ – ? Решение:

$S_{бок}=AA_1\cdot P_{\Delta ABC}$; из ΔAA_1B: $AA_1=AB\cdot tg\,Q$

$P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC$,

в ΔABC: $BC=AB\cdot tg\,\varphi \Rightarrow AC=\dfrac{AB}{\cos\varphi}$

$$P\Delta ABC=AB+AB\cdot tg\varphi+\frac{AB}{\cos\varphi}=AB\left(1+tg\varphi+\frac{1}{\cos\varphi}\right)=$$

$$=\frac{AB}{\cos\varphi}\left(1+\sin\varphi+\cos\varphi\right)=\frac{AB}{\cos\varphi}\left(\sin\varphi-2\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)=$$

$$=\frac{AB}{\cos\varphi}\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{AB}{\cos\varphi}\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{AB}{\cos\varphi}\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot 2\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)}{2}=$$

$$=\frac{AB}{\cos\varphi}\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{AB\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\varphi}$$

$$S_{бок}=AB\cdot tgQ\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{AB\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\varphi}=$$

$$=tg\,Q\cdot\frac{AB^2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\varphi}$$

$$S_{сеч}=\frac{1}{2}A_1B\cdot BC=S_{\Delta A_1BC}=\frac{AB}{\cos Q}\cdot AB\cdot tg\varphi,\ где\ A_1B=\frac{AB}{\cos Q}$$

$$S_{сеч}=\frac{1}{2}AB^2\cdot\frac{tg\alpha}{\cos Q};\frac{S_{бок}}{S_{сеч}}=\frac{AB^2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot tgQ\cdot 2\cdot\cos Q}{\cos\varphi\cdot AB^2\cdot tg\varphi}=$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\sin Q\cdot 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}=2\sqrt{2}\cdot\sin Q\frac{2\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sin Q\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

236. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма

$MK \perp AA_1$, $KN \perp CC_1$, $MN \perp BB_1$

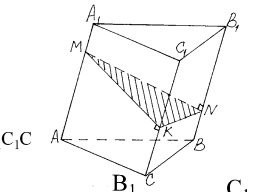
ΔMKN – сечение; Доказать: $S_{бок}=P_{сеч}\cdot AA_1$

Доказательство: $S_{бок}=S_{AA_1C_1C}+S_{AA_1B_1B}+S_{BB_1C_1C}$

$S_{бок}=AA_1\cdot MK+MN\cdot BB_1+KN\cdot CC_1=$

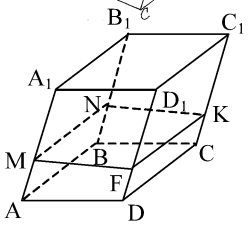
$=AA_1\cdot(MK+MN+KN)=AA_1\cdot P_{сеч}$.

$S_{бок}=P_{сеч}\cdot AA_1$ – справедлива для любой n-угольной наклонной призмы



237. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – накл. призма, $AA_1=12$ см, MNKF – ромб, MN=5 см, $(MNKF)\perp(AA_1B_1B)$; Найти: $S_{бок}$ – ?

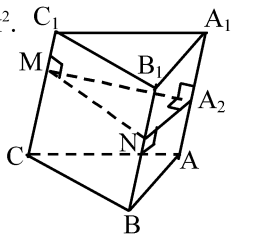
Решение: $S_{бок}=P_{MNKF}\cdot AA_1$; $S_{бок}=4\cdot5\cdot12=240$см^2.



238. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма; $AA_1=24$см, $A_2N=12$см, $A_2M=35$см; $\angle NA_2M=90°$; Найти: $S_{бок}$ – ? Решение:

1) $MN=\sqrt{NA_2^2+MA_2^2}$

$MN=\sqrt{12^2+35^2}=\sqrt{144+1225}=\sqrt{1369}=37$см



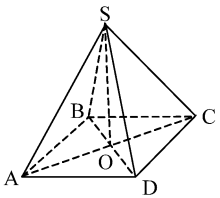
2) $S_{бок}=P_{MNA_2}\cdot AA_1$; $S_{бок}=(12+35+37)\cdot24=84\cdot24=2016$ см^2

239. Дано: ABCDS – пирамида; ABCD – ромб; AB=5 см, BD=8 см; $AC\cap BD=O$, $SO\perp(ABC)$, SO= 7 см

Найти: AS – ?, BS – ?

Решение: 1) ΔABO: $\angle O=90°$; AB=5 см;

BO= 4 см $\rightarrow$ $AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=3$ см



2) ΔBSO: $BS=\sqrt{AO^2-SO^2}$; $BS=\sqrt{16+49}$; $BS=\sqrt{65}$ см

ΔASO: $SA=\sqrt{BO^2+SO^2}$; $SA=\sqrt{9+49}$; $SA=\sqrt{58}$ см

240. Дано: ABCDS – пирамида; AB=20 см, AD=36 см; $S_{ABCD}=360$ см^2; $AC\cap BD=O$, $SO\perp(ABC)$, SO=12 см

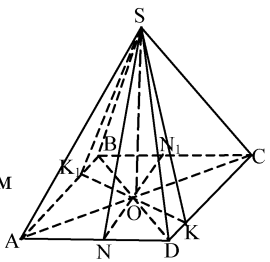
Найти: $S_{бок}$ – ? Решение:

1) $S_{ABCD}=AD\cdot NN_1$; $360=36\cdot NN_1$; $NN_1=10$ см

или $S_{ABCD}=AB\cdot KK_1$; $360=20\cdot KK_1$; $KK_1=18$ см

2) ΔSNO: $\angle O=90°$; NO=5 см; SO=12 см $\rightarrow$

$\rightarrow SN=\sqrt{12^2+5^2}=13$ см



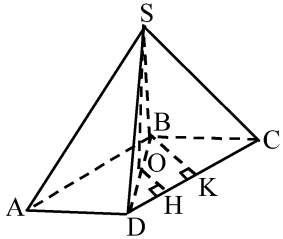
ΔSKO: $\angle O=90°$; OK=9 см; SO=12 см $\rightarrow SK=\sqrt{12^2+9^2}=15$ см

3) $S_{бок}=2\cdot S_{ASD}+2\cdot S_{DSC}$ (т.к. боковые грани попарно равны)

$S_{бок}=2\cdot\frac{1}{2}AD\cdot SN+2\cdot\frac{1}{2}DC\cdot SK$; $S_{бок}=AD\cdot SN+DC\cdot SK=$

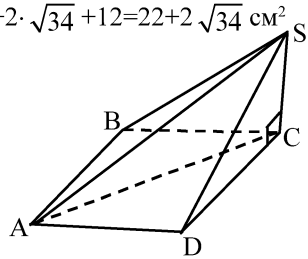
$=36\cdot13+20\cdot15=468+300=768$ см^2

241. Дано: ABCDS – пирамида, AB=5 м, AD=4 м, BD=3 м, AC∩BD=O, SO⊥(ABC), SO=2 м
Найти: $S_{п.п.}$ – ? Решение:



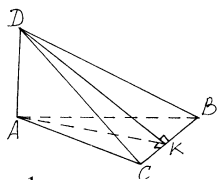
1) Рассмотрим параллелограмм ABCD: AB=5; AD=4; BD=3, отсюда $AB^2=AD^2+BD^2$, т.е. ΔABD – прямоугольный ∠D=90°,
BD – высота параллелограмма; S_{ABCD}=AD·BD, S_{ABCD}=4·3=12 см²; с другой стороны S_{ABCD}=AB · BK; 12=5 · BK; BK = 2,4 см →OH=1,2 см
2) Грани ΔASD и ΔBSC – прямоугольные треугольники
$S_{ASD}=S_{BSC}=\frac{1}{2}$ AD · SD; SD = $\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{4+2,25}$ = 2,5 см
отсюда $S_{ASD}=S_{BSC}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2,5=5$ см²; Грани ΔASB и ΔDSC – остроугольные треугольники $S_{ASB}=S_{DSC}=\frac{1}{2}$ AB·SH; SH= $\sqrt{SO^2+OH^2}=\sqrt{4+1,44}=$
$=0,4\sqrt{34}$ см, где OH = $\frac{1}{2}$ BK; отсюда$S_{ASB}=S_{DSC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 0,4\cdot\sqrt{34}=\sqrt{34}$ см²
3) $S_{пол}=2\cdot S_{ASD}+2\cdot S_{ASB}+S_{осн}$; $S_{пол}=2\cdot 5+2\cdot\sqrt{34}+12=22+2\sqrt{34}$ см²

242. Дано: ABCDS – пирамида; ABCD – квадрат; SC⊥(ABC), ∠SDC=45°; AS=12 см
Найти: SC, $S_{бок}$–? Решение:



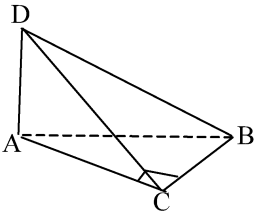
1) Пусть DC=a, тогда SC=a, т.к. ΔDCS – равнобедренный, а AC=a$\sqrt{2}$ (т.к. ABCD – квадрат)
из ΔASC: ∠C=90°; SC= a; AC=a$\sqrt{2}$; AS=12 см → $AS^2=AC^2+SC^2$
$144=2a^2+a^2$; $3a^2=144$; $a^2=48$, a=4$\sqrt{3}$; SC= 4$\sqrt{3}$ см
2) ΔASD=ΔBSA – прямоугольные, $SD=\sqrt{AS^2-AD^2}=$
$=\sqrt{144-48}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$ см;$S_{ASD}=S_{BSA}=\frac{1}{2}$ AD·SD=$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{6}=24\sqrt{2}$ см²
ΔSDC=ΔSBC – прямоугольные $S_{SDC}=S_{SBC}=\frac{1}{2}$ DC·SC=$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}=24$ см² $S_{бок}=2\cdot 24\sqrt{2}+2\cdot 24=48(\sqrt{2}+1)$ см²

243. Дано: DABC – пирамида; AB=AC=13 см, BC=10 см; AD⊥(ABC) и AD=9 см
Найти: $S_{бок}$–? Решение: $S_{бок}=S_{ADC}+S_{ADB}+S_{CDB}$



$S_{ADC}=S_{ADB}$ (т.к. ΔADC=ΔADB); $S_{ADC}=\frac{1}{2}$ AC·AD=$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 9=58,5$ см²
$S_{CDB}=\frac{1}{2}$ DK · CB; ΔCAK: AK=$\sqrt{AC^2-CK^2}$; AK=$\sqrt{169-25}$ =12 см
ΔADK: DK=$\sqrt{AD^2+AK^2}$; DK=$\sqrt{81+144}$ =15 см
отсюда $S_{CDB}=\frac{1}{2}$ 15·10=75 см²; значит $S_{бок}$=58,5·2+75=192 см²

244. Дано: ABCD – пирамида; ΔABC: ∠C=90°, AC=21 см,; AB=29 см, DA⊥(ABC), DA=20 см



Найти: $S_{бок}$ – ? Решение:

$S_{бок}=S_{ADC}+S_{BDA}+S_{DCB}$

все грани прямоугольные треугольники

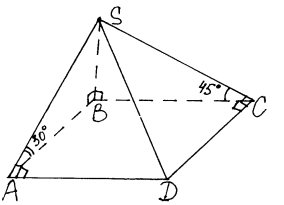
$S_{ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot AC=\frac{1}{2}20\cdot 21=210$ см^2;

$S_{ADB}=\frac{1}{2}AD\cdot AB=\frac{1}{2}20\cdot 29=290$ см^2; $S_{DCB}=\frac{1}{2}DC\cdot CB=\frac{1}{2}29\cdot 20=290$ см^2

ΔADC: $DC=\sqrt{AD^2+AC^2}$; $DC=\sqrt{400+441}$; DC=29 см Δ A B C : $CB=\sqrt{AB^2-AC^2}$; $CB=\sqrt{841-441}$; CB=20 см

значит $S_{бок}=210+2\cdot 290=790$ см^2

245. Дано: ABCDS – пирамида; ABCD – прямоугольник; AC=8 см, SB⊥(ABC); ∠BAS=30°, ∠BCS=45°



Найти: $S_{п.\ п.}$ – ? Решение:

1) Пусть AB=a, тогда $SB=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (т.к. лежит против угла 30°), отсюда $BC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (т.к. BC=SB в ΔSBC).

С другой стороны $AB^2+BC^2=AC^2$ (т.к. ABCD – прямоугольник)

$a^2+\frac{1}{3}a^2=8^2$; $\frac{4a^2}{3}=64$; $a=4\sqrt{3}$ см, т.е. $AB=4\sqrt{3}$ см; BC=4 см

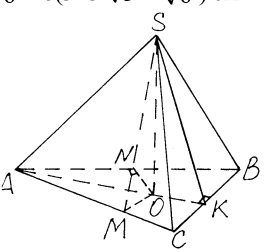
2) $S_{п.\ п.}=S_{ABS}+S_{BCS}+S_{ADS}+S_{DCS}$; $S_{ABS}=\frac{1}{2}AB\cdot BS=\frac{1}{2}4\sqrt{3}\cdot 4=8\sqrt{3}$ см^2

$S_{BCS}=\frac{1}{2}BC\cdot BS=\frac{1}{2}4\cdot 4=8$ см^2; $S_{DAS}=\frac{1}{2}AS\cdot AD=\frac{1}{2}4\cdot 2\cdot SB=4\cdot SB=16$ см^2

$S_{DCS}=\frac{1}{2}SC\cdot DC=\frac{1}{2}4\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{2}=8\sqrt{6}$ см^2; $S_{ABCD}=AB\cdot BC=4\sqrt{3}\cdot 4=16\sqrt{3}$

$S_{п.\ п.}=8\sqrt{3}+8+16+8\sqrt{6}+16\sqrt{3}=24+24\sqrt{3}+8\sqrt{6}=8(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$ см^2

246. Дано: ABCS - пирамида, SO⊥(ABC), SO=40 см, SN⊥AB, SK⊥BC, SM⊥AC, SN=SK=SM=41 см



Доказать: O – центр вписанной окружности в ΔABC

S_{ABC} – ?, если $P_{ABC}=42$ см

Доказательство:

1) Рассмотрим ΔSON и ΔSOM и ΔSOK

SO – общая; SN=SM=SK ⇒ ΔSON=ΔSOM=ΔSOK (по катету и гипотенузе) ⇒ ON=OK=OM, т.е. O – равноудаленная от сторон ΔABC, т.е. лежит на пересечении биссектрис углов ΔABC, следовательно O – центр вписанной окружности, ч.т.д.

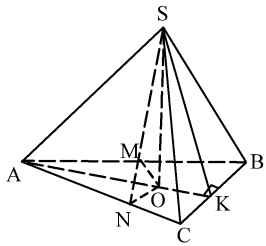
2) $S_{ABC}=\frac{1}{2}P\cdot r$, r – радиус окружности вписанной в ΔABC

$r=OK=\sqrt{SK^2-SO^2}=\sqrt{41^2-40^2}=9$ см; $S_{ABC}=\frac{1}{2}42\cdot 9=21\cdot 9=189$ см^2

247. Дано: ABCS – пирамида, SO⊥(ABC), ∠SNO=∠SKO=∠SMO; Доказать:

а) O – центр окружности вписанной в ΔABC

б) NS=SK=SM; в) $S_{бок}=\frac{1}{2}P_{ABC}\cdot SN$



Доказательство: 1) Рассмотрим ΔSMO и ΔSNO и ΔSKO; SO – общая; ∠SNO=∠SKO=∠SMO (условие) ⇒

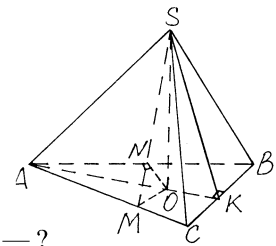
⇒ ΔSMO=ΔSNO=ΔSKO (по катету и острому углу) ⇒

⇒ OM=ON=OK и MS=NS=KS; т.к. OM=ON=OK, то O – равноудалена от сторон ΔABC, значит O – центр окружности вписанной в ΔABC

2) $S_{бок}=\frac{1}{2}AC\cdot SN+\frac{1}{2}AB\cdot SM+\frac{1}{2}BC\cdot SK=\frac{1}{2}SN\cdot(AC+AB+BC)=$

$=\frac{1}{2}SN\cdot P_{ABC}$, ч.т.д.

248. Дано: ABCS – пирамида;
AB=AC=10 см, BC=12 см;
∠SMO=∠SNO=∠SKO=45°
Найти: $S_{бок}$ – ?; Решение:



1) т.к. ∠SMO=∠SNO=∠SKO=45°, то O – центр окружности вписанной в ΔABC и OM=OK=ON=SO. Найдем OK — ?

2) ΔACK~ΔAOM (по 2 углам); $\frac{AC}{AO}=\frac{CK}{OM}=\frac{AK}{AM}$; AC=10, $CK=\frac{1}{2}BC=6$, AK=8; AO=8–r, OM= r ; $\frac{10}{8-r}=\frac{6}{r}$; 10r =6·(8 – r)
10r+6r=48; r=3, т.е. OK=OS=3 см

3) $S_{бок}=\frac{1}{2}P_{ABC}\cdot SK$, ΔSKO: ∠O=90°; OK=OS=3; → $SK=3\sqrt{2}$

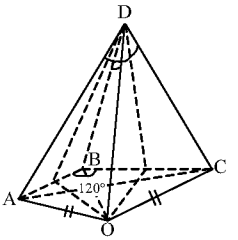
отсюда $S_{бок}=\frac{1}{2}(10+10+12)\cdot 3\sqrt{2}=16\cdot 3\sqrt{2}=48\sqrt{2}$ см^2

249. Дано: ABCDS – пирамида, SO⊥(ABC), SA=SB=SC

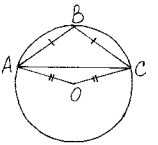
Доказать: а) O – центр описанной окружности

б) ∠SAO=∠SBO=∠SCO; Доказательство: Рассмотрим ΔSAO и ΔSBO и ΔSCO; SO — общая; AS=SB=SC (условие) ∠SOA=∠SOB=∠SOC ⇒ ΔSAO=ΔSBO=ΔSCO ⇒ ∠SAO=∠SBO = =∠SCO т.к. AO=BO=CO, то O – равноудалена от точек A, B, C, значит O – центр окружности описанной около ΔABC

250. Дано: ABCD – пирамида,
AB=BC, ∠B=120°, DO⊥(ABC), DO=16 см,
∠ADO=∠BDO=∠CDO=45°
Найти: S_{ABC} — ? Решение:



1) т.к. ∠ADO=∠BDO=∠CDO=45°,
то AO=OB=OC=OD — радиус
окружности описанной около ΔABC,
а т.к. ∠B=120°, то O – вне треугольника



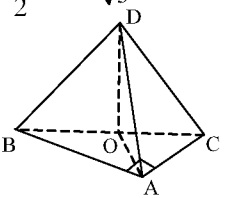
2) ∠ABC–вписанный и ∠ABC=120°
отсюда ∠AOC=∠ABC=360°-240°
∠AOC=120°; AO=OC=OD=16 см
по т. синусов в ΔAOC:

$$\frac{AC}{\sin 120°}=\frac{AO}{\sin 30°}=\frac{OC}{\sin 30°};\ \frac{AC}{\sqrt{3}/2}=\frac{16}{1/2}\Rightarrow AC=16\sqrt{3}$$

т.к. в ΔABC AB=BC и ∠B=120°, то AB=BC=16 см

отсюда $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin 120°$; $S_{ABC}=\frac{1}{2}16\cdot 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=64\sqrt{3}$ см²

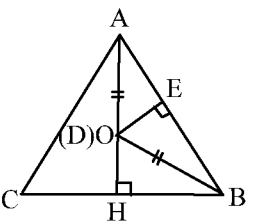
251. Дано: ABCD – пирамида,
ΔABC: ∠A=90°, BC=10 см,
DA=DB=DC, DO⊥(ABC), DO=12 см
Найти: AD – ? Решение:



т.к. BD=DA=DC, то O – центр
окружности описанной около ΔABC,
ΔABC – прямоугольный, значит O∈ BC, $BO=OC=\frac{1}{2}BC=5$ см

в ΔBDO: ∠O=90°; BO=5 см; DO=12 см → $BD=\sqrt{5^2+12^2}=13$ см

252. Дано: ABCDS – пирамида,
AB=AC, BC=6 см, DO⊥(ABC), AH⊥BC,
AH=9 см, DA=DB=DC=13 см
Найти: DO — ? Решение:



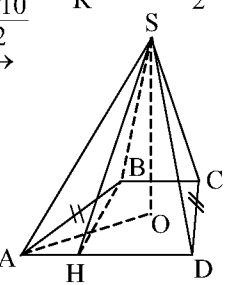
1) ΔAHB~ΔAEO (по 2 углам)

$\frac{AH}{AE}=\frac{HB}{EO}=\frac{AB}{AO}$; AH=9 см,

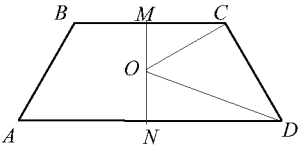
$AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{81+9}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$ см; AO=R; $\frac{9}{\frac{3\sqrt{10}}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{R}$; $9R=\frac{9\cdot 10}{2}$;
R=5 см

2) ΔADO: ∠O=90°; AO=5 см; AD=13 см →
→ $DO=\sqrt{AD^2-AO^2}=\sqrt{169-25}=12$ см

253. Дано: ABCDS – пирамида,
ABCD–равнобедренная трапеция,
AD=6 см, BC=$4\sqrt{6}$ см, BH⊥AD,
BH=5 см, AS=BS=CS=DS=13 см
Найти: SO — ? Решение:



1) т.к. AS=BS=CS=DS, то O – центр окружности описанной около ABCD и лежит на высоте MN



OC=OD=R – радиус этой окружности;

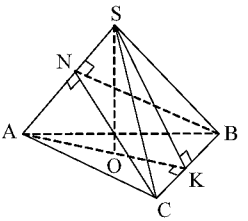
$R^2=MC^2+MO^2$; $R^2=ND^2+ON^2$

$MC^2+MO^2=ND^2+ON^2$; $3^2+MO^2=(2\sqrt{6})^2+(5-MO)^2$

$9+MO^2=24+25-10MO+MO^2$; MO=4 см, отсюда $R=\sqrt{9+16}=5$ см

2) ΔSOA: ∠O=90°; AO=5см; AS=13см → $SO=\sqrt{AS^2-AO^2}$; SO = 12 см

254. Дано: ABCS – правильная пирамида, AB=a, SO⊥(ABC), SO=H



Найти: а) SA — ?; б) ∠ASB — ?

в) ∠SAO — ?; г) ∠SKO — ?

д) ∠CASB — ? Решение:

а) т.к. ΔABC – правильный и AB=a, то

$AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OK=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

ΔASO: ∠O=90°; $AO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; SO=H → $AS=\sqrt{\frac{a^2}{3}+H^2}$

б) ΔASB – равнобедренный; $AS=BS=\sqrt{\frac{a^2}{3}+H^2}$, AB=a тогда SM⊥AB, гдеAM=MB и SM - биссектрисса ∠ASB.

$$\frac{AM}{AS}=\sin\frac{\angle ASB}{2};\ \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2}+H}}=\sin\frac{1}{2}\angle ASB;\ \angle ASB=2\arcsin\frac{a}{2\sqrt{\frac{a^2}{3}+H}}$$

в) ΔASO: ∠O=90°; $AO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; SO=H; → $tg\angle SAO=\frac{SO}{AO}$;

$$tg\angle SAO=\frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}=\frac{H\sqrt{3}}{a};\ \angle SAO=arctg\frac{H\sqrt{3}}{a}$$

г) ΔSOK: ∠O=90°; $OK=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; SO=H → $tg\angle SKO=\frac{SO}{OK}$

$$tg\angle SKO=\frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}=\frac{H2\sqrt{3}}{a};\quad \angle SKO=arctg\frac{H2\sqrt{3}}{a}$$

д) $NC^2=AC^2-AN^2$; $NC^2=SC^2-SN^2$; SC = AS; →

$$a^2-AN^2=\frac{a^2}{3}+H^2-\left(\sqrt{\frac{a^2}{3}+H^2}-AN\right)^2;\ a^2=2\sqrt{\frac{a^2}{3}+H^2}\cdot AN$$

$$AN=\frac{a^2\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+3H^2}};\ \text{отсюда}\quad CN^2=a^2-\frac{3a^4}{4(a^2+3H^2)}$$

$$CN^2=\frac{4a^4+12a^2H^2-3a^4}{4(a^2+3H^2)};\ CN^2=\frac{a^2(a^2+12H^2)}{4(a^2+3H^2)};$$

в ΔCNK: $NK^2=NC^2-CK^2$;

$$NK^2=\frac{a^2}{4}\left(\frac{a^2+12H^2}{a^2+3H^2}\right)-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}\left(\frac{a^2+12H^2}{a^2+3H^2}-1\right)=$$

$$=\frac{a^2}{4}\cdot\frac{9H^2}{a^2+3H^2};\ NK=\frac{3aH}{2\sqrt{a^2+3H^2}};\ \frac{CK}{NK}=\frac{a\cdot 2\sqrt{a^2+3H^2}}{2\cdot 3aH}=\frac{\sqrt{a^2+3aH^2}}{3H};$$

$$\frac{CK}{NK}=tg\frac{1}{2}CNB,\ \angle CNB=2arctg\frac{\sqrt{a^2+3H^2}}{3H}$$

255. Дано: ABCS – правильная пирамида, AB=8 см, ∠ASB= φ
Найти: SO — ? Решение: 1) ΔABC – правильный,

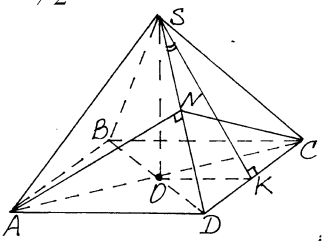
AK= $\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ см; AO : OK=2 : 1, значит OK= $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см

2) Δ SKC:∠K=90°;∠CSK= $\varphi/2$;CK=4 см;→SK= $\frac{4}{tg\,\varphi/2}$,(см. рис №254)

3) Δ SOK: ∠O=90°; OK= $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см; SK= $\frac{4}{tg\,\varphi/2}$ см → SO= $\sqrt{SK^2-OK^2}$;

$$SO=\sqrt{\frac{16}{tg^2\,\varphi/2}-\frac{16}{3}}=4\sqrt{\frac{1}{tg^2\,\varphi/2}-\frac{1}{3}}=\frac{4}{tg\,\varphi/2}\sqrt{1-\frac{1}{3}tg^2\,\varphi/2}$$

256. Дано: ABCDS – правильная пирамида, AB=m, ∠ASB=α
Найти: а) SO — ?; б) AS — ?
в) ∠SKO — ?; г) ∠ANC — ?
Решение: а) ΔSOK: ∠O=90°



OK= $\frac{1}{2}$AD= $\frac{m}{2}$; SK= $\frac{m}{2\,tg\,\alpha/2}$; →

SO= $\sqrt{SK^2-OK^2}$ (из ΔSKD: ∠S= $\alpha/2$, DK= $\frac{m}{2}$)

$$SO=\sqrt{\frac{m^2}{4\,tg^2\,\alpha/2}-\frac{m^2}{4}}=\frac{m}{tg\,\alpha/2}=\sqrt{1-tg^2\,\alpha/2}=$$

$$=\frac{m\cos\alpha/2}{2\sin\alpha/2}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha/2-\sin^2\alpha/2}{\cos^2\alpha/2}}=\frac{m\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\alpha/2}$$

б) ΔDSK: $\frac{DK}{DS}=\sin\frac{\alpha}{2};\ DS=\frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}};\ AS=DS$

в) ΔSKO: ∠O=90°; OK= $\frac{m}{2}$; SO= $\frac{m\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\alpha/2}$; SK= $\frac{m}{2tg\,\alpha/2}$ →

cos∠SKO = $\frac{OK}{SK}$; cos∠SKO= $\frac{\frac{m}{2}\cdot 2tg\frac{\alpha}{2}}{m}=tg\frac{\alpha}{2}$

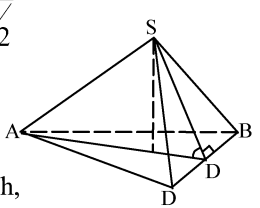
cos∠SKO= $tg\,\alpha/2$; ∠SKO=arccos $tg\,\alpha/2$

г) AN=AS·sinα; AN=$\frac{m}{2\sin\alpha/2}\cdot\sin\alpha = m\cos\alpha/2$

из ΔANO: ∠O=90°; AO=$\frac{m\sqrt{2}}{2}$; AN= $m\cos\alpha/2$; → sin∠ANO=$\frac{AO}{AN}$

sin∠ANO=$\frac{\frac{m\sqrt{2}}{2}}{m\cos\alpha/2}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha/2}$;∠ANO=arcsin $\frac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha/2}$;

∠ANC =2arcsin $\frac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha/2}$ = 2arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2\cos\alpha/2}$



257. Дано: ABCS – правильная пирамида, SO⊥(ABC), SO= h, ∠ADS=45°

Найти: $S_{п.п.}$ — ? Решение:

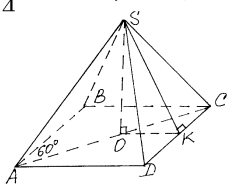
1) ΔSOD: ∠O=90°; ∠D=45°; SO=h; → OD=h,

т.к. OD=$\frac{1}{3}$AD, тоAD=3h, SD=h$\sqrt{2}$

2) ΔABC – правильный, AD=$\frac{AB\sqrt{3}}{2}$; 3h=$\frac{AB\sqrt{3}}{2}$ ⇒ AB=$2\sqrt{3}$ h

3) $S_{п.п.}=S_{осн}+3S_{BSC}$; $S_{п.п.}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{2}$ CB·SD=$\frac{12h^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot2\sqrt{3}h\cdot h\sqrt{2}=$

$=3\sqrt{3}h^2+3\sqrt{6}h^2=3\sqrt{3}h^2(1+\sqrt{2})$



258. Дано: ABCDS – правильная пирамида, ∠SAO=60°, AS=12 см

Найти: $S_{п.п.}$ — ? Решение:

1)ΔASO: ∠O=90°; ∠A=60°; AS=12 см; →

→ AO=AS·cos60°=12·$\frac{1}{2}$ =6 см; SO=AS·sin60°=12·$\frac{\sqrt{3}}{2}$ =6$\sqrt{3}$ см

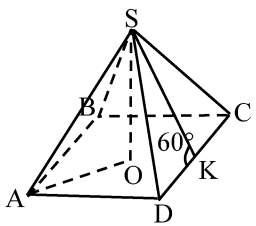
2) т.к. ABCD – квадрат, то AB$\sqrt{2}$ =AC; AC=2AO=2·6=12 см,

отсюда AB=6$\sqrt{2}$ см ; ΔSOK: ∠O=90°; OK=3$\sqrt{2}$ см; SO=6$\sqrt{3}$ см →

→ SK=$\sqrt{SO^2+OK^2}$; SK=$\sqrt{108+18}=\sqrt{126}=3\sqrt{14}$

3) $S_{пол.}=S_{ABCD}+4S_{ABS}$;

$S_{пол.}=\left(6\sqrt{2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{2}\cdot6\sqrt{2}\cdot3\sqrt{14}=72+2\cdot36\sqrt{7}=72\left(1+\sqrt{7}\right)$ см²



259. Дано: ABCDS – правильная пирамида,

AB= 6 см, ∠SKO=60°; Найти: AS — ?

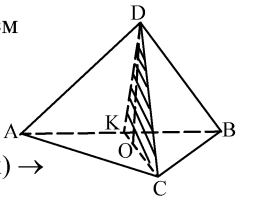
Решение: 1) ΔSOK: ∠O=90°; ∠K=60°;

OK=$\frac{1}{2}$AB=3 см → SO=OK·tg∠K;

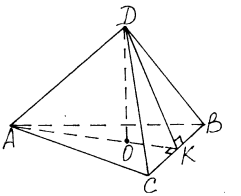
SO=3·tg60°=3$\sqrt{3}$ см

2) ΔASO: ∠O=90°; AO=$\frac{6\sqrt{2}}{2}$ см; SO=3$\sqrt{3}$ см →

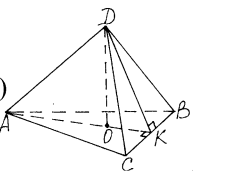
$AS=\sqrt{AO^2+OS^2}$; $AS=\sqrt{18+27}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ см



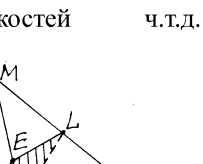
260. Дано: ABCD – правильная пирамида
Доказать: а) $AB\perp(DKC)$; б) $CK\perp(ABD)$
Док–во: 1) $CK\perp AB$ (как высота ΔABC) ;
$DO\perp KC$; $DK\perp AB$ (по т. 3-х перпендикулярах) $\rightarrow$
отсюда $AB\perp KC$; $AB\perp KD$; $KC\cap KD=K\rightarrow$
$AB\perp(KDC)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости
2) DK – апофема грани ADB; $CK\perp KD$ (условие) $AB\perp(KDC)\Rightarrow AB\perp KC$ (опред.); $KD\cap AB=K\in(ABD)\rightarrow KC\perp(ABD)$ (по призн.), ч.т.д.



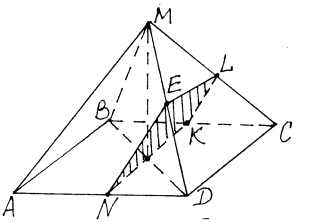
261. Дано: ABCD – правильная пирамида
Доказать: $AD\perp BC$; Доказательство:
$DK\perp BC$ (высота ΔCDB);
$AK\perp BC$ (высота ΔABC)
$AO=np_{(ABC)}AD$, $AO\perp BC\Rightarrow AD\perp BC$
(т. о 3-х перпендикулярах), ч.т.д.



262. Дано: ABCD – правильная пирамида
Доказать: $(ADK)\perp(BDC)$; Доказательство:
1) $DK\perp BC$; $AK\perp BC$; $AK\cap DK=K\rightarrow BC\perp(ADK)$
по признаку перп. прямой и плоскости
2) $BC\perp(ADK)$; $BC\in(DBC)\rightarrow$
$\rightarrow(DKA)\perp(BDC)$ по признаку перпендик. плоскостей ч.т.д.

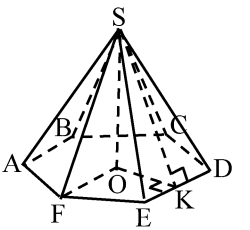


263. Дано: MABCD – правильная пирамида, $K\in BC$, $L\in MC$, $N\in AD$, $KN\parallel BA$, $KL\parallel BM$
Определить вид сечения плоскостью (KLN)
Доказать: $(KLN)\parallel(AMB)$
Доказательство



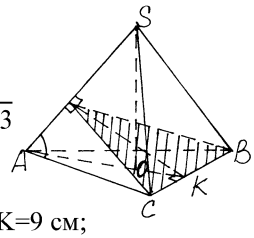
Сечение KLEN – равнобедренная трапеция
$(KLN)\parallel(AMB)$ по признаку параллельности плоскостей
$AB\cap BM=B\in(AMB)$; $KN\cap KL=K\in(NKL)$; $AB\parallel KN$ (усл.);
$BM\parallel KL$ (усл.) $\rightarrow(ABM)\parallel(NKL)$ ч.т.д.

264. Дано: ABCDEFS – правильная пирамида, $AB=a$, $S_{ASB}=S_{SCF}$; Найти: $S_{бок}$ — ? Решение:
1) $S_{ASB}=\frac{1}{2}AB\cdot h$; $S_{SCF}=\frac{1}{2}FC\cdot SO$; $\rightarrow$
$AB\cdot h=FC\cdot SO$; $a\cdot h=2a\cdot SO$; $h=2\cdot SO\Rightarrow SO=\frac{1}{2}h$



с другой стороны: $SO^2+OK^2=SK^2$
$\frac{1}{4}h^2+\frac{3}{4}a^2=h^2$; $\frac{3}{4}h^2=\frac{3}{4}a^2$; $h=a$ 2) $S_{бок}=6\cdot S_{ABS}$; $S_{бок}=6\cdot\frac{1}{2}a\cdot a=3a^2$

265. Дано: ABCS – правильная пирамида,
$\angle SAO=60°$, $\angle AKE=30°$, AB=12 см
Найти: S_{BCE} — ? Решение:



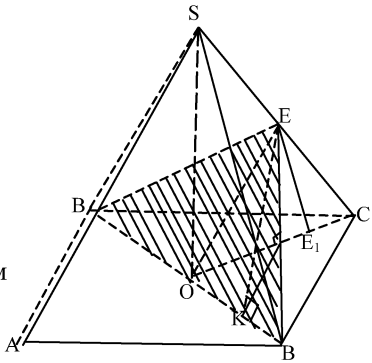
1) ΔABC – правильный; $AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

2) ΔAEK: $\angle A=60°$; $\angle K=30° \to \angle E=90°$;

$AK=6\sqrt{3}$, $EK=AK\cdot\cos30°$; $EK=6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$; EK=9 см;

3) $S_{BCE}=\frac{1}{2}BC\cdot EK$; $S_{BCE}=\frac{1}{2}12\cdot9=54$ см^2

266. Дано: ABCDS – пирамида,
ABCD – прямоугольник, AB=6 дм,
AD=8 дм, $SO\perp(ABC)$, SO=2 дм,
AS=BS=CS=DS, AS||(BED)
Найти: S_{BED} — ? Решение:



1) $S_{BED}=\frac{1}{2}BD\cdot EK$, где $EK\perp BD$

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{64+36}=10$ дм

2) Найдем величину EK
Рассмотрим прям-ник ABCD
$S_{ABCD}=6\cdot8\cdot=48$ дм^2

$S_{COD}=\frac{1}{4}S_{ABCD}=12$ дм^2; с другой стороны $S_{COD}=\frac{1}{2}h\cdot OD$; $12=\frac{1}{2}h\cdot5 \Rightarrow$

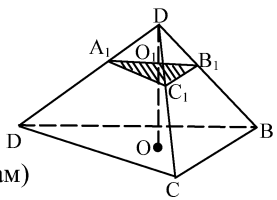
$\Rightarrow h=\frac{24}{5}$ дм; т.к. $E_1K=\frac{1}{2}h$, то $E_1K=\frac{12}{5}$ дм рассмотрим ΔEE_1K:

$\angle E_1=90°$ $EE_1=1$ дм (средняя линия ΔSOC); $E_1K=\frac{12}{5}$ дм $\to$

$\to EK^2=KE_1^2+EE_1^2$; $EK^2=\frac{144}{25}+1=\frac{169}{25}\Rightarrow EK=\frac{13}{5}$ дм;

значит $S_{BED}=\frac{1}{2}\cdot10\cdot\frac{13}{5}=13$ дм^2

267. Дано: ABCD – пирамида, $\alpha||(ABC)$



Доказать: $\frac{A_1D}{A_1A}=\frac{C_1D}{C_1C}=\frac{DB_1}{B_1B}=\frac{DO_1}{O_1O}$

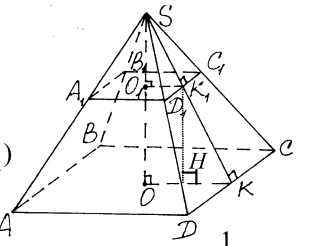
Доказательство: $\Delta ADC\sim\Delta A_1DC_1$ (по 2 углам)

$\frac{AD}{A_1D}=\frac{DC}{DC_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ аналогично $\frac{CD}{DC_1}=\frac{DB}{DB_1}$

$AA_1=AD-A_1D$; $CC_1=DC-DC_1$; $BB_1=DB-DB_1\to$

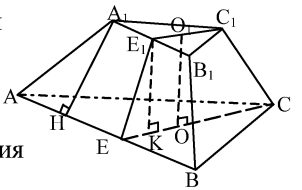
$\to \frac{AD}{AA_1}=\frac{CD}{CC_1}=\frac{DB}{BB_1}$ ч.т.д.

268. Дано: ABCDS – правильная пирамида, $(A_1B_1C_1)\|(ABC)$, $SO_1:O_1O=1:2$, $KK_1=4$ дм, $S_{пол.}=186$ дм^2
Найти: OO_1 — ? Решение:



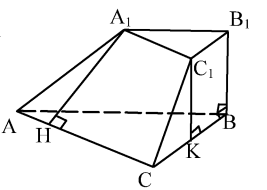
1) $S_{пол.}=AD^2+A_1D_1^2+4\cdot(\frac{1}{2}(AD+A_1D_1)\cdot KK_1)$
пусть $AD=x$, $A_1D_1=y$; $186=x^2+y^2+2(x+y)4$
$186=x^2+y^2+8(x+y)$; с другой стороны известно, что $SO_1:O_1O=1:2$, значит $y:x=1:3$ $(SO=1+2=3)$; $y=\frac{1}{3}x$
$186=x^2+\frac{1}{9}x^2+8\cdot\frac{4}{3}x \mid \cdot 9$; $1674=9x^2+x^2=96x$; $10x^2+96x-1674=0$
$5x^2+48x-837=0$; $\frac{D}{4}=24^2+5\cdot 837=576+4185=4761$; $x_{1,2}\frac{-24\pm 69}{5}$;
$x_1=9$; $x_2=-18{,}6$; $AD=9$ дм, $A_1D_1=3$ дм
2) ΔK_1KH : $K_1H=\sqrt{K_1K^2-HK^2}$; $K_1H=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ дм
$O_1O=K_1H=\sqrt{7}$ дм

269. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная усеченная пирамида, $AB=4$ дм, $A_1B_1=2$ дм, $AA_1=2$ дм
Найти: OO_1 и A_1H — ? Решение:



1) AA_1B_1B – равнобедренная трапеция
$AH=\frac{1}{2}(AB-A_1B_1)$; $AH=\frac{1}{2}(4-2)=1$ дм
ΔAA_1H: $\angle H=90°$; $AA_1=2$ дм; $AH=1$ дм $\rightarrow A_1H=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ дм
2) ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ – правильные; $CE=2\sqrt{3}$ дм; $C_1E_1=\sqrt{3}$ дм
$EE_1=A_1H=\sqrt{3}$ дм; $EK=EO-E_1O_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$E_1K=\sqrt{EE_1^2-EK^2}$; $OO_1=E_1K=\sqrt{3-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ дм

270. Дано: ABC $A_1B_1C_1$ – правильная усеченная пирамида, $AB=5$ см, $A_1B_1=3$ см, $BB_1\perp(ABC)$, $BB_1=1$ см
Найти: $S_{бок}$ — ? Решение: $S_{бок}=S_{AA_1B_1B}+S_{BCC_1B_1}+S_{AA_1C_1C}$

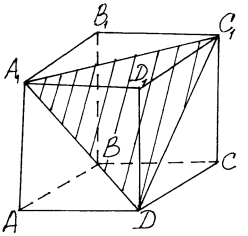


$S_{AA_1B_1B}=\frac{1}{2}(AB+A_1B_1)\cdot BB_1=\frac{1}{2}(5+3)\cdot 1=4$ см^2
$S_{BCC_1B_1}=\frac{1}{2}(BC+B_1C_1)\cdot BB_1=\frac{1}{2}(5+3)\cdot 1=4$ см^2
$S_{AA_1C_1C}=\frac{1}{2}(AC+A_1C_1)\cdot A_1H=4\cdot A_1H$
Найдем: A_1H: $CC_1=\sqrt{5}$ см; $A_1H=\sqrt{AA_1^2-AH^2}$; $A_1H=\sqrt{5-1}=2$ см
значит $A_1H=2$ см $\Rightarrow S_{AA_1C_1C}=8$ см^2; $S_{бок}=4+4+8=16$ см^2

279. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

Найти: $\angle A_1DC_1$ — ? Решение:

т.к. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, все грани равны, то $A_1D=DC_1=A_1C_1$, т.е. ΔA_1DC_1 – равносторонний, значит $\angle A_1DC_1=60°$



280. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, AB=a

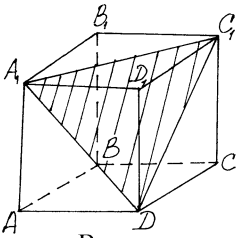
Найти: $S_{A_1DC_1}$ — ? Решение:

т.к. AB=a, то $A_1D=a\sqrt{2}$;

$$S_{A_1DC_1}=\frac{(A_1D)^2\sqrt{3}}{4}$$

(площадь правильного треугольника)

$$S_{A_1DC_1}=\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\text{ ед}^2$$

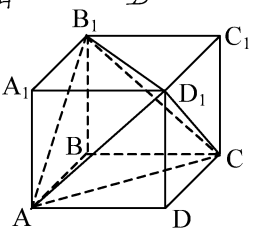


281. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

Доказать: D_1AB_1C – правильный тетраэдр

$\frac{S_{куба}}{S_{тетр}}$ — ? Доказательство:

1) D_1AB_1C – треугольная пирамида, все грани которой правильные треугольники со стороной $a\sqrt{2}$ (ребра пирамиды диагонали квадрата).



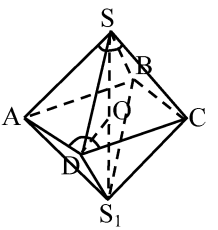
Т.к. $B_1D_1=D_1C=D_1A$, то D_1 проектируется в центр окружности, описанной около ΔAB_1C.

Значит, D_1AB_1C – тетраэдр правильный.

2) $S_{куба}=6a^2$; $S_{тетр.}=4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}a^2$; $\frac{S_{куба}}{S_{тетр}}=\frac{6a^2}{2\sqrt{3}a^2}=\sqrt{3}$

282. Дано: октаэдр; Найти: α; Решение:

Т.к. октаэдр состоит из 8 правильных треугольников, то $SO\perp(ABCD)$ и O – центр окружности описанной около ABCD, т.к. AB=BC=CD=AD, то ABCD – квадрат. Следовательно, углы между двумя ребрами имеющими общую вершину, но не принадлежащие одной грани прямые: 90°.

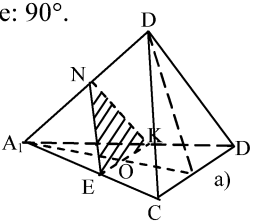


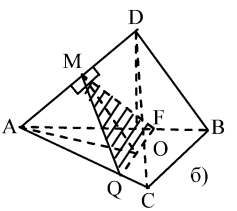
283. Дано: DABC – правильный тетраэдр, AB=a

Найти:

а) S_{ENK} – ?

б) S_{QFM} – ?





Решение: а) $\Delta ABC \sim \Delta AKE$ (по 2 углам)

$\frac{EK}{BC}=\frac{2}{3} \Rightarrow EK=\frac{2}{3}a$; т.к. ΔENK – правильный, то

$S_{ENK}=\frac{EK^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4a^2\cdot\sqrt{3}}{9\cdot 4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$

б) ΔAOD : $\angle O=90°$; $AO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $AD=a \to DO=\sqrt{AD^2-AO^2}$

$DO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$; $OM^2=DO^2-MD^2$; $OM^2=AO^2-AM^2$;$DO^2-MD^2=AO^2-(a-MD)^2$

$\frac{2a^2}{3}-MD^2=\frac{a^2}{3}-a^2+2aMD-MD^2$; $\frac{2a^2}{3}=-\frac{2a^2}{3}+2aMD$

$\frac{2a^2}{3}=a\cdot MD$; $MD=\frac{2a}{3}$; отсюда: $MO=\sqrt{\frac{2a^2}{3}-\frac{4a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$S_{QFM}=\frac{1}{2}QF\cdot MO$, $S_{QFM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{a\sqrt{2}}{3}=\frac{a^2\sqrt{2}}{9}$

284. Дано: ABCS – правильный тетраэдр, AB=2. Отсекаем от каждой вершины по тетраэдру с ребром 1.

Получим правильный октаэдр с ребром 1 (см. рисунок)

285. Дано: ABCS – правильный тетраэдр, M, N, K, O – центры граней. Доказать: ON=OM=OK; Доказательство:

Т.к. тетраэдр правильный, то все грани правильные треугольники и точки M, N, K, O – центры окружностей, вписанных в треугольники.

Рассмотрим ΔNOE и ΔMOH:

$NE=OE=OH=HM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $\angle E=\angle H$;

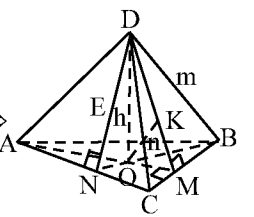
$\Delta NOE=\Delta MOH$ (по 2 сторонам и углу); NO=OM

Аналогично доказываем, что ON=OK (из ΔNOG и ΔKOQ)

286. Дано: ABCD – правильный тетраэдр,

DO=h, AB=m, OK=n

Выразить: а) m через h; б) n через m



Решение: 1) ΔABC: $BN=\frac{m\sqrt{3}}{2}$; NO:OB=1:2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow OB=\frac{m\sqrt{3}}{3}$; $DO^2=DB^2-OB^2$;

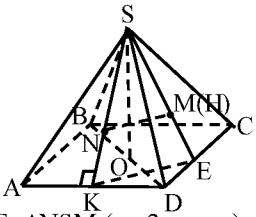
$h^2=m^2-\left(\frac{m\sqrt{3}}{3}\right)^2$; $h^2=\frac{2m^2}{3} \Rightarrow m=\sqrt{\frac{3h^2}{2}}=h\frac{\sqrt{6}}{2}$

б) ΔDOM: $\angle O=90°$; $OM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $DM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\to \cos\angle M=\frac{OM}{DM}=\frac{1}{3}$

ΔOKM: по т. косинусов $OK^2=OM^2+KM^2-2OM\cdot KM\cdot\cos\angle M$

$n^2=\frac{m^2}{12}+\frac{m^2}{12}-2\cdot\frac{m^2}{12}\cdot\frac{1}{3}$; $n^2=\frac{m^2}{6}-\frac{m^2}{18}=\frac{m^2}{9}$; $n=\frac{m}{3}$

287. Дано: октаэдр AB=a
Найти: а) AC – ?; б) MN – ?
в) d – расст. между
противолежащими сторонами
Решение:



а) ABCD – квадрат, значит $AC=a\sqrt{2}$

б) $EK=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (ср. лин. ΔACD); ΔKSE~ΔNSM (по 2 углам)

$\frac{NM}{KE}=\frac{2}{3}$; $NM=\frac{2}{3}KE=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{3}$

в) $d=2\cdot OH$; ΔSOE: $\angle O=90°$; $SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\rightarrow \sin E=\frac{SO}{SE}$;

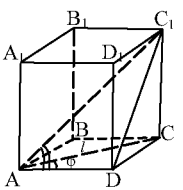
$SE=\frac{a\sqrt{3}}{2}\rightarrow \sin E=\frac{\sqrt{3}}{6}$; $OE=\frac{a}{2}$; отсюда $OH=OE\cdot\sin E$

$OH=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$; значит $d=2\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

288. Число вершин любой призмы четное число 2 k, где k – число вершин одного основания. А т.к. оснований 2, то всего вершин 2k.
Число ребер 3k, где k - число вершин основания, т.к. число ребер равно числу вершин в основании, т.к., у нас два основания — уже 2k, т.к. боковые ребра соединяют соответственно k вершин верхнего основания с k вершинами нижнего основания – всего k, вывод: k+k+k=3k.

289. Дано: куб; Доказать: $S_{п.п.}=2d^2$; Док–во: $S_{п.п.}=6\cdot a^2$; с другой стороны $d^2=a^2+a^2+a^2$ (свойство) $d^2=3a^2$, значит $S_{п.п.}=2\cdot 3\cdot a^2=2d^2$, ч.т.д.

290. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AC=l$, $\angle CAD=\varphi$, $\angle C_1AD=\theta$
Найти: $S_{бок}$ — ? Решение:



1) ΔACD: $CD=AC\cdot\sin\angle A$; $CD=l\sin\varphi$
$AD=AC\cdot\cos\angle A$; $AD=l\cos\varphi$;
$P_{ABCD}=2l(\sin\varphi+\cos\varphi)$

2) ΔAC_1D: $\angle D=90°$; $AD=l\cos\varphi$; $\angle A=\theta\rightarrow tg\angle A=\frac{C_1D}{AD}$; $C_1D=l\cos\varphi\cdot tg\theta$

3) ΔDCC_1: $\angle C=90°$; $CC_1=\sqrt{DC_1^2-DC^2}$

$CC_1=\sqrt{l^2\cos^2\varphi\, tg^2 q-l^2\sin^2\varphi}$

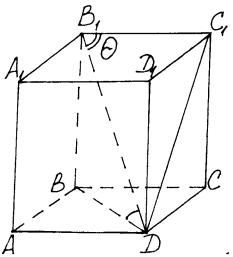
$CC_1=\sqrt{\cos^2\varphi\, tg^2\theta-\sin^2\varphi}=\frac{\sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\theta-\sin^2\varphi\cos^2\theta}\cdot l}{\cos\theta}$

$=\frac{\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\cdot\sin(\theta-\varphi)}\cdot l}{\cos\theta}$

$S_{бок}=P_{ABCD}\cdot CC_1$; $S_{бок}=\frac{2l(\sin\varphi+\cos\varphi)\cdot l\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)}}{\cos\theta}$

$$S_{бок}=\frac{2\sqrt{2}l^2\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)}}{\cos\theta}$$

291. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $\angle B_1DB=\varphi$, $B_1D=d$, $\angle DB_1C_1=\theta$



Найти: $S_{бок}$ — ? Решение:

1) ΔBB_1D: $\angle B=90°$; $BB_1=B_1D\cdot\sin\angle D$; $BB_1=d\sin\varphi$

2) ΔB_1C_1D: $B_1C_1=d\cdot\cos\theta$; $C_1D= d\cdot\sin\theta$

3) ΔDCC_1: $CC_1= d\cdot\sin\varphi$; $C_1D=d\cdot\sin\theta \rightarrow$

$\rightarrow DC=\sqrt{d^2\sin^2\theta-d^2\sin^2\varphi}=d\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\varphi}$

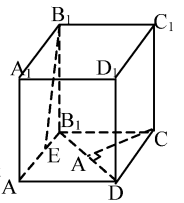
4) $S_{бок}=P_{ABCD}\cdot CC_1$; $S_{бок}=2(d\cos\theta+d\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\varphi})\cdot d\sin\varphi=$

$= 2d^2\sin\varphi(\cos\theta+\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\varphi})=$

$= 2d^2\sin\varphi(\cos\theta+\sqrt{\sin(\theta-\varphi)\sin(\theta+\varphi)}$

292. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма, $AB=6$ см, $AA_1=8$ см

Найти: расстояние от BC до B_1D;



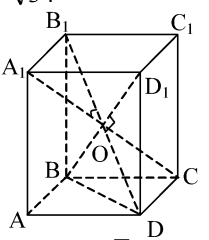
Решение: Рассмотрим ΔB_1CD: $\angle C=90°$;

$DC=6$ см; $B_1C=10$ см

$B_1D=\sqrt{CB_1^2+CD^2}=\sqrt{100+36}=2\sqrt{34}$; $\Delta CDE\sim\Delta B_1DC$

$\frac{CE}{BC_1}=\frac{CD}{B_1D}$; $\frac{CE}{10}=\frac{6}{2\sqrt{34}}\Rightarrow CE=\frac{60}{2\sqrt{34}}$; $CE=\frac{30}{\sqrt{34}}$; $CE\approx 5{,}2$ *см*

293. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма, $B_1D\perp BD_1$



Доказать: $\angle A_1OB_1=60°$

Доказательство:

1) Пусть $AB=a$, тогда $BD=a\sqrt{2}$

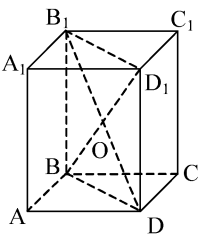
т.к. BB_1D_1D – прямоугольник, у которого $B_1D\perp BD_1$, значит BB_1D_1D – квадрат со стороной $BD=BB_1=a\sqrt{2}$, отсюда $B_1D= BD\sqrt{2}=2a$,

т.к. диагонали $B_1D\cap BD_1=O$ и $B_1O=\frac{1}{2}B_1D=a$

$A_1C= B_1D=2a$, то $A_1O=a$

2) ΔA_1OB_1: $A_1O=OB_1=A_1B_1=a$, значит $\angle A_1OB_1=60°$

294. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма, $S_{BB_1D_1D}=S_0$, $AB=a$

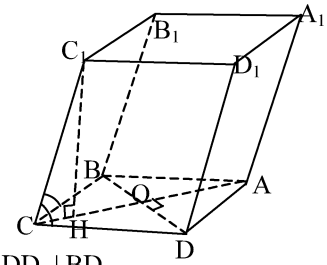


Найти: $S_{бок}$ — ? Решение

1) $S_{BB_1D_1D}=BD\cdot BB_1$; $S_0=a\sqrt{2}\cdot BB_1$; $BB_1=\frac{S_0\sqrt{2}}{2a}$

2) $S_{бок}=P_{ABCD}\cdot BB_1$; $S_{бок}=4a\cdot\frac{S_0\sqrt{2}}{2a}=2\sqrt{2}\,S_0$

295. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – наклонный параллелепипед, ABCD – ромб, $\angle C_1CB=\angle C_1CD$



Доказать: а) $CC_1 \perp BD$

б) BB_1D_1D – прямоугольник

в) $BD \perp AA_1C_1$; г) $(AA_1C_1) \perp (BB_1D_1)$

Доказательство: а) $CA=пр_{(ABC)}CC_1$

$CA \perp BD$ (св-во диагоналей ромба) $\rightarrow$

$CC_1 \perp BD$ (по т. 3-х перпендикулярах)

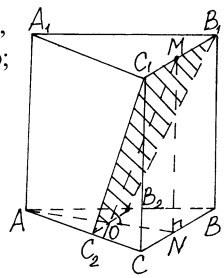
б) $BB_1 \| DD_1 \| CC_1$; $CC_1 \perp BD \rightarrow BB_1 \perp BD$, $DD_1 \perp BD$, значит BB_1D_1D — прямоугольник

в) $CC_1 \perp BD$ (из 1); $BD \perp AC$ (св-во диагоналей)

$CC_1 \cap AC=C \in (AA_1C_1) \rightarrow BD \perp (AA_1C_1)$ по признаку перпендик. прямой и плоскости

г) $BD \in (BB_1D_1D)$; $BD \perp (AA_1C_1) \rightarrow (AA_1C_1) \perp (BB_1D_1)$ по признаку перпендик. плоскостей, ч.т.д.

296. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма, C_2B_2– средняя линияΔABC; $AA_1=h$, $\angle MON=\varphi$;



Найти: $S_{сеч}$ — ? Решение:

1) ΔOMN: $\angle N=90°$; $MN=h$; $\angle O=\varphi \rightarrow$

$\rightarrow OM=\dfrac{h}{\sin\varphi}$; $ON=\dfrac{h}{tg\,\varphi}$

2) ΔABC: пусть $AB=a$, тогда $AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

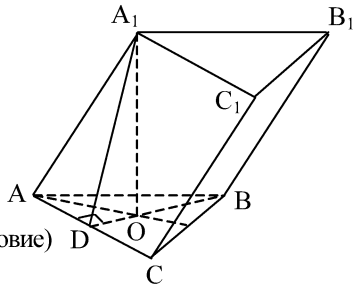
$ON=AO=\dfrac{1}{2}\cdot AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ выразим a через h:

$\dfrac{a\sqrt{3}}{4}=\dfrac{h}{tg\,\varphi}$; $a=\dfrac{4h}{\sqrt{3}\,tg\,\varphi}$

3) $S_{сеч}=\dfrac{1}{2}\cdot(B_1C_1+C_2B_2)\cdot MO$

$$S_{сеч}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4h}{\sqrt{3}\,tg\,\varphi}+\frac{2h}{\sqrt{3}\,tg\,\varphi}\right)\cdot\frac{h}{\sin\varphi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6h\cos\varphi}{\sqrt{3}\sin\varphi}\cdot\frac{h}{\sin\varphi}=\frac{\sqrt{3}h^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$

297. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма, $AB=BC=AC$, $BD \perp AC$, $A_1O \perp (ABC)$, O – центр ΔABC



Доказать: а) $(A_1BD) \perp (AA_1C_1)$

б) $(AA_1O) \perp (BB_1C)$

в) (BB_1C_1C)–прямоугольник

Доказательство:

а) $A_1O \perp (ABC)$ (условие); $BD \perp AC$(условие)

A_1D – наклонная, $A_1D \perp AC$

(по т. 3–х перпендикулярах)

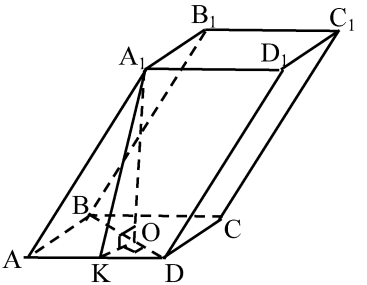
$A_1D \cap DB=D \in (A_1DB) \rightarrow AC \perp (A_1DB)$; т.к. $AC \in (AA_1C_1)$ и $AC \perp (A_1DB)$, то $(AA_1C_1) \perp (A_1DB)$ по признаку перпендик. плоскостей

б) аналогично доказывается $(AA_1O)\perp(BB_1C_1)$

в) $AA_1\perp BC$ (по т. 3–х перпендикулярах)

$AA_1 \| BB_1 \| CC_1$ (опред.) $\rightarrow$ $BB_1\perp BC$, $CC_1\perp BC$,

т.е. BB_1C_1C – прямоугольник ч.т.д.



298. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, ABCD – квадрат, $AB=a$, $AA_1=b$, $AA_1=A_1B=A_1D=A_1C$

Найти: $S_{п.\ п.}$ — ? Решение:

$A_1O\perp(ABC)$, O – центр квадрата

$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}a\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$AA_1^2=AO^2+OA_1^2$

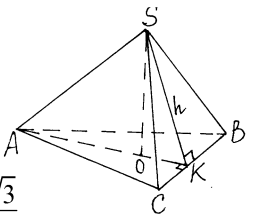
$b^2=\frac{a^2}{2}+OA_1^2 \Rightarrow OA_1=\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}}$

$h_{бок.}=\sqrt{OA_1^2+OK^2}=\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$

$S_{п.\ п.}=2S_{осн.}+4S_{AA_1D_1D}$; $S_{п.\ п.}=2a^2+\frac{4a\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$; $S_{п.\ п.}=2a^2+2a\sqrt{4b^2-a^2}$

299. Дано: ABCS – правильная пирамида, $AB=m$, $S_{бок}=2S_{осн.}$, $SO\perp(ABC)$

Найти: SO — ? Решение:



1) $S_{ABC}=\frac{m^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{бок}=3S_{ASC}=3\cdot\frac{1}{2}\cdot m\cdot h$

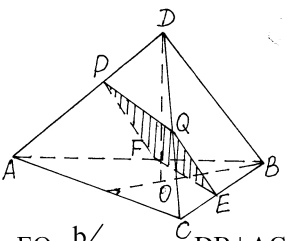
т.к. $S_{бок}=2S_{ABC}$; $\frac{3}{2}m\cdot h=\frac{m^2\sqrt{3}}{2}$, т.е. $SK=\frac{m\sqrt{3}}{3}$

2) ΔSOK: $\angle O=90°$; $OK=\frac{m\sqrt{3}}{6}$; $SK=\frac{m\sqrt{3}}{3}$; $\rightarrow$

$SO=\sqrt{SK^2-OK^2}$; $SO=\sqrt{-\frac{m^2}{12}+\frac{m^2}{3}}=\sqrt{\frac{m^2}{4}}=\frac{m}{2}$

300. Дано: ABCD – правильная пирамида, $E\in BC$, $BE=EC$, $F\in AB$, $AF=FB$, $P\in AD$, $AP=PD$, $AB=a$, $AD=b$; Найти: S_{EFPQ} — ? Решение:

PQEF – параллелограмм



т.к. $FE\|AC$, $FE=\frac{1}{2}AC$

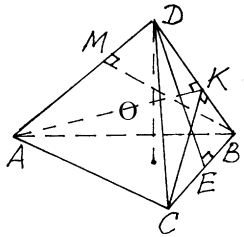
$PQ\|AC$, $PQ=\frac{1}{2}AC$ (по признаку); $FE=a/2$; $EQ=b/2$, но т.к. $DB\perp AC$, а $QE\|FP\|DB$, значит, $QE\perp AC$, $PF\perp AC$

т.к. $AC\|FE \Rightarrow FP\perp FE$, следовательно PQEF – прямоугольник

$S_{PQEF}=FE\cdot EQ$; $S_{PQEF}=\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=\frac{ab}{4}$

301. Дано: ABCD – правильная пирамида, $\angle AKC=120°$, $BM \perp AD$, $BM=16$ см

Найти: DE — ? Решение:



1) ΔAKC: по т. косинусов

$AC^2=AK^2+CK^2-2AK\cdot CK\cdot\cos120°$

$AC^2=16^2+16^2-2\cdot16\cdot16\cdot(-\frac{1}{2})$; $AC=16\sqrt{3}$ см

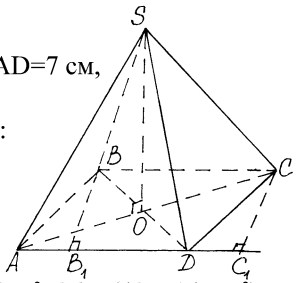
2) Пусть $DB=x$, тогда $BM^2=DB^2-DM^2$; $AM^2=AB^2-MB^2$, $AM=16\sqrt{2}$

$\to x^2-(x-16\sqrt{2})^2=16^2$; $x^2-x^2+32\sqrt{2}x=16^2\cdot3$; $32\sqrt{2}x=16\cdot48$; $x=12\sqrt{2}$ см

3) ΔDCE: $\angle E=90°$; $DC=12\sqrt{2}$ см; $CE=8\sqrt{3}$ см $\to DE=\sqrt{DC^2-CE^2}$

$DE=\sqrt{\left(12\sqrt{2}\right)^2-\left(8\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{288-192}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$ см

302. Дано: ABCDS – пирамида, ABCD — параллелограмм, $AB=3$ см, $AD=7$ см, $BD=6$ см, $AC\cap BD=O$, $SO\perp(ABC)$, $SO=4$ см; Найти: AS, BS — ? Решение:



1) $BO=\frac{1}{2}BD=3$ см

ΔBSO: $\angle O=90°$; $BO=3$ см; $SO=4$ см $\to$

$\to BS=\sqrt{BO^2+OS^2}$; ; $BS=SD=5$ см

2) $B_1B^2=AB^2-x^2$; $B_1B^2=BD^2-(7-x)^2$; $9-x^2=36-(49-14x+x^2)$

$9-36+49=14x$; $14x=22$; $x=\frac{11}{7}$; $AB_1=\frac{11}{7}$, $B_1D=\frac{38}{7}$

$BB_1^2=9-\frac{121}{49}=\frac{320}{49}=\frac{8\sqrt{5}}{7}$; $AC^2=AC_1^2+CC_1^2$

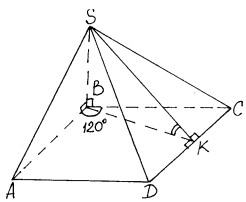
$AC^2=\left(8\frac{4}{7}\right)^2+\frac{320}{49}=\frac{3600+320}{49}=80$; $AC=4\sqrt{5}$, $AO=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{5}$

3) ΔASO: $\angle O=90°$; $AO=2\sqrt{5}$ см; $SO=4$ см $\to$

$\to AS=\sqrt{OS^2+AO^2}$; $AS=\sqrt{20+16}=6$ см; $AS=CS=6$ см

303. Дано: ABCDS – пирамида, ABCD — ромб, $\angle ABC=120°$, $\angle SKB=30°$, $SB\perp(ABC)$, $SB=12$ см

Найти: $S_{п.п.}$ — ? Решение:



1) ΔSBK: $\angle B=90°$; $\angle K=30°$; $SB=12$ см$\to$

$\to SK=24$ см, т.к. против $\angle30°$; $BK=12\sqrt{3}$

2) ABCD — ромб; $\angle B=120° \Rightarrow \angle C=60°$, значит

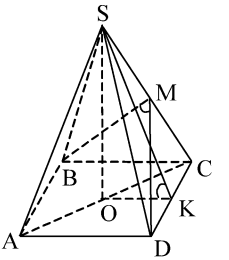
$BC=\frac{BK}{\sin60°}=\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2}=24$ см; $S_{осн}=AB\cdot BC\cdot\sin120°=24\cdot24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=288\sqrt{3}$ см^2

$S_{ABS}=S_{CBS}=\frac{1}{2}BS\cdot AB=\frac{1}{2}12\cdot24=144$ см^2; $S_{ADS}=S_{DCS}=\frac{1}{2}SK\cdot DC=\frac{1}{2}24\cdot24=288$ см^2

$S_{п.п.}=2(144+288)+288\sqrt{3}=2\cdot432+288\sqrt{3}=288\cdot(3+\sqrt{3})$ см^2

304. Дано: ABCDS – правильная пирамида,

$\angle ASB=60°$; Доказать: $\angle SKO=\frac{1}{2}\angle DMB$



Доказательство: Пусть AB=a, тогда AS=a

ΔSDC– правильный, $MD\perp SC\Rightarrow$

$\rightarrow MC=\frac{a}{2}$; $OM=\sqrt{OC^2-MC^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}$

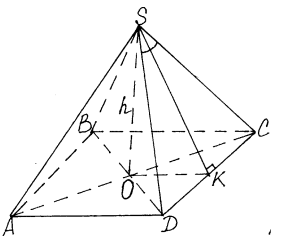
ΔSOK: $tg\angle K=\frac{SO}{OK}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}$, $SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

ΔOMD: $tg\angle OMD=\frac{OD}{OM}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}$; отсюда $\angle K=arctg\sqrt{2}$;

$\angle BMD=2\ arctg\sqrt{2}\rightarrow\angle K=\frac{1}{2}\angle BMD$; ч.т.д

305. Дано: ABCDS – правильная пирамида, $SO\perp(ABC)$, SO=h, $\angle DSC=\alpha$

Найти: $S_{бок.}$ — ? Решение:



Пусть AB=a, $SK=\frac{a}{2tg\alpha/2}$

Выразим a через h:

ΔSOK: $SO^2=SK^2-OK^2$

$h^2=\frac{a^2}{4tg^2\alpha/2}-\frac{a^2}{4}$; $h^2=\frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{tg^2\alpha/2}-1\right)$; $a^2=\frac{4h^2\,tg^2\alpha/2}{1-tg^2\alpha/2}$; $a=\frac{2htg\alpha/2}{\sqrt{1-tg^2\alpha/2}}$

$S_{бок}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2htg\alpha/2}{\sqrt{1-tg^2\alpha/2}}\cdot\frac{a}{2tg\alpha/2}=$

$=\frac{2h}{\sqrt{1-tg^2\alpha/2}}\cdot\frac{2htg\alpha/2}{\sqrt{1-tg^2\alpha/2}}=\frac{4h^2\,tg\alpha/2}{1-tg^2\alpha/2}=2h^2\,tg\alpha$

306. Дано: ABCDS – правильная пирамида,

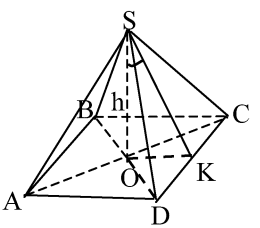
$SO\perp(ABC)$, SO=h, $\angle OSK=\varphi$; Найти: $S_{п.п.}$ — ?; Решение:

ΔSOK: $OK=htg\varphi\Rightarrow SK=h/cos\varphi$; $AB=2htg\varphi$; $S_{осн}=AB^2=4h^2tg^2\varphi$

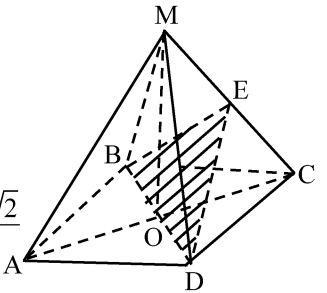
$S_{бок}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot2htg\varphi\cdot h/cos\varphi=\frac{4h^2tg\varphi}{\cos\varphi}$

$S_{п.п.}=4h^2tg^2\varphi+\frac{4h^2\,tg\varphi}{\cos\varphi}=$

$=4h^2tg^2\varphi\left(1+\frac{1}{\sin\varphi}\right)$

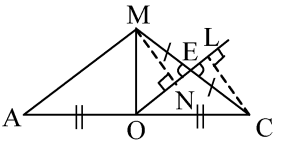


307. Дано: ABCDM – правильная пирамида, AM=b, AD=a, OE||AM
Найти: S_{BED} — ? Решение:



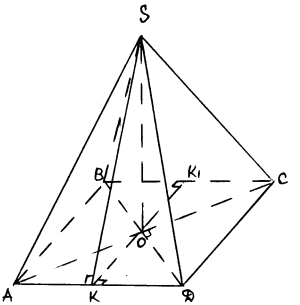
а) $BD=a\sqrt{2}$; $EO=\frac{1}{2}AM=\frac{b}{2}$
(как средняя линия ΔAMC)→
→ $S_{BED}=\frac{1}{2}BD\cdot OE$; $S_{BED}=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{b}{2}=\frac{ab\sqrt{2}}{4}$

б) Докажем, что точки M и C равноудалены от пл. α;



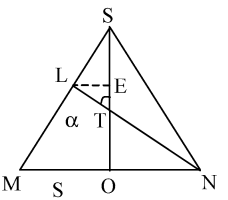
OE – средняя линия ΔAMC; ME = EC;
проведем MN ⊥ OE и CL ⊥ OE;
BD ⊥ пл. AMC, значит BD ⊥ MN,
BD ⊥ CL ⇒ MN ⊥ BDE и CL ⊥ BDE;
ΔNME = ΔLCE (по гипотенузе и острому углу) ⇒ MN = CL

308. Дано: ABCDS – правильная пирамида, ABCD – ромб,AB=5см, BD=6 см, SO⊥(ABC), SO=3,2 см
Найти: SK — ? Решение:

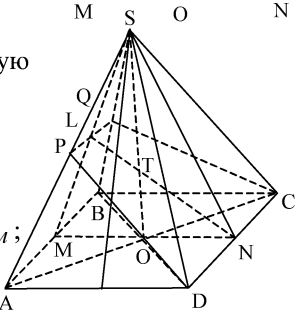


1) AB=5 см, BO=3 см ⇒ AO=4 см
$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$; $S_{ABCD}=\frac{1}{2}8\cdot 6=24$ см,
с другой стороны $S_{ABCD}=AD\cdot KK_1$
$24=5\cdot KK_1$; $KK_1=4{,}8$ см ⇒ KO=2,4 см
2) ΔSOK: ∠O=90°; KO=2,4 см;
SO=3,2см → $SK=\sqrt{KO^2+SO^2}=\sqrt{2{,}4^2+3{,}2^2}=$
$=\sqrt{5{,}76+10{,}24}=4$ см

309. Дано: ABCDS – пирамида ABCD – прямоугольник, AB=6 дм, AD=8 дм, AS=BS=CS=DS, SO=6 дм
Найти: S_{ABEN} — ? Решение:



1) $AC=BD=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$ дм
2) В сечении получим равнобедренную трапецию PQCD



$S_{сеч}=\frac{PQ+DC}{2}\cdot LN$;
LN – высота трапеции;
$SN=\sqrt{SO^2+NO^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$ *дм* ;
LE ⊥ SO;
из ΔLET: LE = x · sin α, где x = LT;
из ΔTON: $\cos\alpha=\frac{OT}{TN}=\frac{3}{5}$; $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; отсюда

LE = x · sin α = $\frac{4x}{5}$; $ET = x \cdot \cos\alpha = \frac{3x}{5}$;

ΔMSO ~ ΔLES, поэтому $\frac{SO}{MO} = \frac{SE}{LE}$; $\frac{6}{4} = \frac{3 - \frac{3x}{5}}{\frac{4x}{5}}$; $x = \frac{5}{3}$ (дм)

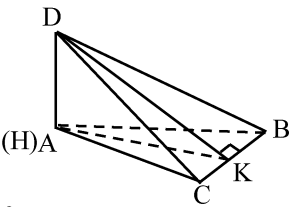
LN = $\frac{20}{3}$ (дм); ES = 2 (дм); LE = $\frac{4}{3}$ (дм);

LS = $\sqrt{SE^2 + LE^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 4} = \frac{\sqrt{52}}{3}$ (дм);

PQ = 2PL; из ΔMSO: SM = $\sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$ (дм); ΔAMS ~ ΔPLS,

$\frac{AM}{SM} = \frac{PL}{SL}$; $\frac{3}{\sqrt{52}} = \frac{PL}{\frac{\sqrt{52}}{3}}$; PL = 1 (дм); тогда PQ = 2 (дм)

$S_{сеч} = \frac{2+6}{2} \cdot \frac{20}{3} = \frac{80}{3} дм^2$



310. Дано: ABCD – пирамида,
DA⊥(ABC), AB=AC=25 см, BC=40 см,
DH=DA=8 см – высота пирамиды
Найти: $S_{бок}$ — ?; Решение:

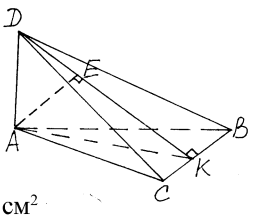
$S_{ADC}=S_{ADB}=\frac{1}{2}AD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 25 = 100 см^2$

1) $CK^2+AK^2=AC^2$; $20^2+AK^2=25^2$ ⇒ AK=15 см

2) $DK^2=AD^2+AK^2$; $DK^2=64+225$ ⇒ DK=17 см

$S_{BDC}=\frac{1}{2}BC \cdot DK=\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 17=340$ см²; $S_{бок}=2 \cdot 100+340=540$ см²

311. Дано: DABC – пирамида,
AC=13 см, AB=15 см, CB=14 см,
DA⊥(ABC) и AD=9 см
Найти: а) $S_{п.п.}$ — ?
б) AE — ?, если AE⊥(BCD) Решение:



1) $S_{ADC}=\frac{1}{2} 9 \cdot 13=58,5$ см²; $S_{ADB}=\frac{1}{2} 9 \cdot 15=67,5$ см²

$S_{ABC}=\sqrt{21 \cdot (21-13)(21-15)(21-14)}=84$ см²; $S_{ABC}=\frac{1}{2}AK \cdot BC$

$84=\frac{1}{2}AK \cdot 14$; AK=12 см; $DK^2=DA^2+AK^2$

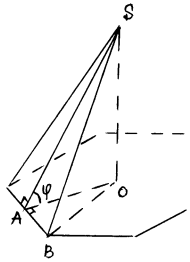
$DK=\sqrt{81+144}=\sqrt{255}=15$ см; $S_{CDB}=\frac{1}{2}DK \cdot BC=\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 14 = 105$ см²,

$S_{п.п.}=58,5+67,5+84+105=315$ см²

2) $AD^2=DE \cdot DK$; $81=DE \cdot 15$; DE=5,4 см; отсюда

$AE=\sqrt{AD^2 - DE^2}$; $AE=\sqrt{81-29,16}=7,2$ см

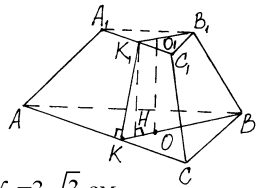
312. Дано: правильная n–угольная пирамида, $\angle SAO=\varphi$
Найти: $tg\angle SBO$ — ? Решение:
$AO=r$, $OB=R$ – радиусы вписанной и описанной окружностей $r=R\cos\frac{180°}{n} \Rightarrow$



$\Rightarrow R=\frac{r}{\cos\frac{180°}{n}}$; ΔASO: $SO=AOtg\angle A$; $SO=rtg\varphi$

ΔBSO: $tg\angle SBO=\frac{SO}{BO}$; $tg\angle SBO=\frac{\frac{rtg\varphi}{r}}{\cos\frac{180°}{n}}=tg\varphi\cdot\cos\frac{180°}{n}$

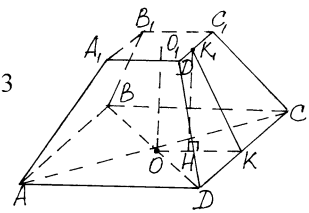
313. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – усеченная правильная пирамида, $AB=12$ дм, $A_1B_1=6$ дм, $OO_1=1$ дм
Найти: $S_{бок}$ — ? Решение:



$S_{бок}=3\cdot S_{AA_1C_1C}$, т.к. ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ – правильные треугольники $BK=6\sqrt{3}$ см, $B_1K_1=3\sqrt{3}$ см
ΔKHK_1: $\angle H=90°$; $K_1H=1$ дм; $KH=KO-K_1O_1=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$ дм
$KK_1^2=K_1H^2+KH^2$; $KK_1^2=1+3=4 \Rightarrow KK_1=2$ дм

$S_{бок}=3\cdot\frac{1}{2}(12+6)\cdot 2=54$ дм^2

314. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная усеченная пирамида, $OO_1=63$ см, $KK_1=65$ см, $AB : A_1B_1=7 : 3$
Найти: AB, A_1B_1 — ? Решение:



ΔK_1HK: $\angle H=90°$; $K_1H=63$ см;
$K_1K=65$ см; $\rightarrow HK=\sqrt{K_1K^2-K_1H^2}$
$HK=\sqrt{65^2-63^2}=16$ см
$AB : A_1B_1=(A_1B_1+32) : B_1A_1=7 : 3$; $3A_1B_1+96=7A_1B_1$; $4A_1B_1=96$
$A_1B_1=24$ см; отсюда $AB=24+32=56$ см

315. Правильный октаэдр составлен из 8 равносторонних треугольников. Если взять центры граней, то получим 8 вершин, расстояния между которыми равны (см. 285).

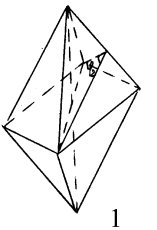
Ребра перпендикулярны друг другу. Многогранник – куб.

316. Правильный тетраэдр составлен их 4 правильных треугольников. Если взять центры граней, то получим четыре вершины, расстояние между которыми равны.

Все полученный грани правильные треугольники. Т.е. многогранник – правильный тетраэдр.

317. Куб – состоит из 6 квадратов Если взять центры граней, то получим 6 вершин многогранника, а грани правильные треугольники, их 8. Многогранник – октаэдр. Все эти задачи доказываются аналогично через равенство треугольников.

318. Дано: ABCD – правильный тетраэдр; правильный октаэдр. Доказать, что сумма двугранного угла правильного тетраэдра и двугранного угла октаэдра равна 180°



Доказательство: Пусть ребро равно а, тогда в тетраэдре: по т. косинусов:

$$a^2=\frac{3a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}-2\frac{3a^2}{4}\cos\varphi;\ a^2=\frac{3a^2}{2}-\frac{3a^2}{2}\cos\varphi;\ \cos\varphi=\frac{1}{3}$$

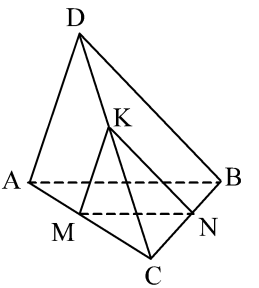
в октаэдре: по т. косинусов:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2=\frac{3a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}-2\frac{3a^2}{4}\cos\varphi_2;\ 2a^2=\frac{3a^2}{2}-\frac{3a^2}{2}\cos\varphi_2$$

$$\cos\varphi_2=-\frac{1}{3},\ \textit{значит}\ \varphi_2=180-\varphi$$

Таким образом доказали, что $\varphi+\varphi_2=180°$, ч.т.д.

Глава IV. Векторы



320. Дано: ABCD – тетраэдр, $M\in AC$, AM=MC, $N\in BC$, BN=NC, $K\in CD$, CK=KD, AB=3 см, BC=4 см, BD=5 см Найти:

а) $|\overrightarrow{AB}|=3$; $|\overrightarrow{BC}|=4$; $|\overrightarrow{BD}|=5$;

$|\overrightarrow{MN}|=1{,}5$; $|\overrightarrow{BN}|=2$; $|\overrightarrow{NK}|=2{,}5$;

б) $|\overrightarrow{CB}|=4$; $|\overrightarrow{BA}|=3$; $|\overrightarrow{DB}|=5$; $|\overrightarrow{NC}|=2$; $|\overrightarrow{KN}|=2{,}5$

321. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, AD=8 см, AB=9 см, AA_1=12 см Найти:

а) $|\overrightarrow{CC_1}|=12$; $|\overrightarrow{CB}|=8$; $|\overrightarrow{CD}|=9$

б) $|\overrightarrow{DC_1}|=\sqrt{9^2+12^2}=15$; $|\overrightarrow{DB}|=\sqrt{64+81}=\sqrt{145}$

$|\overrightarrow{DB_1}|=\sqrt{81+144+64}=17$

322. а) $\overrightarrow{D_1A_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{C_1B_1}$; $\overrightarrow{DK}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{C_1B_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CB}$

б) $\overrightarrow{C_1B_1}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{A_1A}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CC_1}$ $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}\uparrow\downarrow\overrightarrow{D_1A_1}$

в) $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{D_1A_1}$

323. а) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PC}$

б) MPQN – параллелограмм по призн. ($\overrightarrow{MN}\uparrow\uparrow\overrightarrow{QP}$ и $|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{QP}|$

324. а) верно; б) верно; в) неверно.

325. а) $AB\|A_1B_1$ – или совпадают; б) $AB\|\alpha$, или $AB\in\alpha$

в) $\alpha\|\beta$; α и β — совпадают, или $\alpha\cap\beta=a$, где $a\|AB\|A_1B_1$

326. а) $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ г) $\overrightarrow{C_1B_1}$; д) $\overrightarrow{MB_1}$

327. а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$

в) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{C_1B}$; г) $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB_1}$

д) $\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{DC_1}$

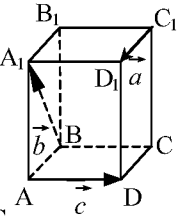
328. а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}$

б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$ ч.т.д.

в) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}$ ч.т.д.

329. а) $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{A_1D_1}$; $\overrightarrow{B_1C_1}$; $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{DC_1}$; $\overrightarrow{AB_1}$;

в) $\overrightarrow{C_1D_1}$; $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{B_1A_1}$; $\overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{B_1A_1}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{C_1D_1}$



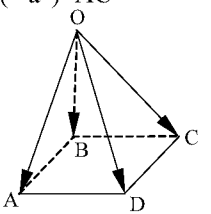
330. а) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{C_1C}$;

б) $\vec{a}-\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{c})=\overrightarrow{C_1A_1}$;

в) $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})=\overrightarrow{BB_1}$;

г) $\vec{c}-\vec{b}=\vec{c}+(-\vec{b})=\overrightarrow{A_1C}$; д) $\vec{c}-\vec{a}=\vec{c}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AC}$

331. Дано: ABCD – параллелограмм,
O – произвольная точка Доказать:
а) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$; б) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DA}$



Доказательство: а) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$; $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ верно,

т.к. $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$ (как стороны параллелограмма)

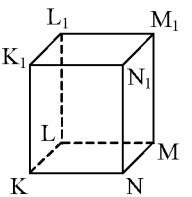
б) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ верно

т.к. $\overrightarrow{CB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DA}$ и $|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{DA}|$ (как стор. параллелограмма), ч.т.д.

332. а) $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A_1A}$; б) $\overrightarrow{DK}=-\overrightarrow{KA_1}-\overrightarrow{A_1A}-\overrightarrow{AD}$

333. а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=$
$=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DB}=0$

б) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$



334. Доказать: а) $|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MM_1}|=|\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MM_1}|$

$|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MM_1}|=|\overrightarrow{MK_1}|$

$|\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MM_1}|=|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{M_1M}|=|\overrightarrow{M_1K}|$

т.к. $|\overrightarrow{MK_1}|$ и $|\overrightarrow{M_1K}|$ — диагонали прямоугольного параллелепипеда, то $|\overrightarrow{MK_1}|=|\overrightarrow{M_1K}|$, ч.т.д.

б) $|\overrightarrow{K_1L_1}-\overrightarrow{NL_1}|=|\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{MM_1}|$

$|\overrightarrow{K_1L_1}-\overrightarrow{NL_1}|=|\overrightarrow{K_1L_1}+\overrightarrow{L_1N}|=|\overrightarrow{K_1N}|$ | равны как диагона–

$|\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{MM_1}|=|\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LL_1}|=|\overrightarrow{ML_1}|$ | ли прямоугольника

в) $|\overrightarrow{NL}-\overrightarrow{M_1L}|=|\overrightarrow{K_1N}-\overrightarrow{LN}|$

$|\overrightarrow{NL}-\overrightarrow{M_1L}|=|\overrightarrow{NL}+\overrightarrow{LM_1}|=|\overrightarrow{NM_1}|$ | равны как диагона–

$|\overrightarrow{K_1N}-\overrightarrow{LN}|=|\overrightarrow{K_1N}+\overrightarrow{NL}|=|\overrightarrow{K_1L}|$, | ли прямоугольника ч.т.д.

335. а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+0+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}$

б) $\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{AK}+0=\overrightarrow{AK}$

в) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{DK}+0+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CP}$

г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{NM}=0$

336. а) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$

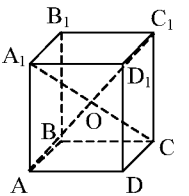
б) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}$

в) $-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

337. а) $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AD}$

б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{DM}=$
$=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{AK}$

в) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BM}=$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}=0$



338. Доказать: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_1}$,
O – любая точка; $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OC_1}$
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{C_1O}$; $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{C_1A_1}$ верно
т.к. $\overrightarrow{CA}\uparrow\uparrow\overrightarrow{C_1A_1}$ и $|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{C_1A_1}|$

339. а) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{CD_1}+\vec{x}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{DB}$
$\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1A_1}+\vec{x}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}+\vec{x}=\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{DC_1}+\vec{x}=\overrightarrow{DB}$
$\vec{x}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC_1}$; $\vec{x}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C_1D}$; $\vec{x}=\overrightarrow{C_1B}$

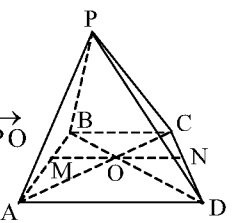
б) $\overrightarrow{DA}+\vec{x}+\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1A}+\vec{x}=\overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{DA}+\vec{x}=\overrightarrow{DC}$; $\vec{x}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$; $\vec{x}=\overrightarrow{AC}$

340. а) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C}-\vec{x}=\overrightarrow{BA}$; $\vec{x}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C}-\overrightarrow{BA}$
$\vec{x}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{AB}$; $\vec{x}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$; $\vec{x}=\overrightarrow{AC}$

б) $\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{BB_1}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1C}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}$
$\vec{x}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$; $\vec{x}=\overrightarrow{CB}$

в) $\overrightarrow{AB_1}+\vec{x}=\overrightarrow{AC}-\vec{x}+\overrightarrow{BC_1}$; $\vec{x}+\vec{x}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{AB_1}$;
$2\vec{x}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{B_1A}$; $2\vec{x}=\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{BC_1}$;
$2\vec{x}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$; $2\vec{x}=2\overrightarrow{BC}$; $\vec{x}=\overrightarrow{BC}$

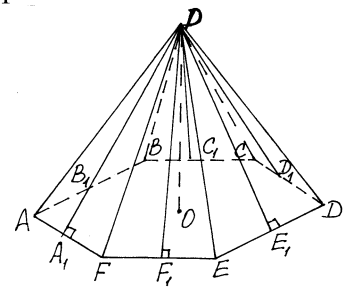
341. Дано: ABCDP – пирамида
ABCD – трапеция, O $\in$ MN, OM=ON,
MN–средняя линия. Доказать: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}$



Док–во: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PM}+2\overrightarrow{PN}=$
$=2(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PM})=2\cdot 2\overrightarrow{PO}=4\overrightarrow{PO}$ (использовали правило параллелограмма), ч.т.д.

342. Дано: правильная 6–и угольная пирамида

Доказать: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=$
$=\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{PC_1}+\overrightarrow{PD_1}+\overrightarrow{PE_1}+\overrightarrow{PF_1}$



Доказательство: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PB_1}$

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PC_1}$; $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PD_1}$

$\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}=2\overrightarrow{PE_1}$; $\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=2\overrightarrow{PF_1}$

$\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PA_1}$;

$2\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{PE}+2\overrightarrow{PF}=$
$=2\overrightarrow{PA_1}+2\overrightarrow{PB_1}+2\overrightarrow{PC_1}+2\overrightarrow{PD_1}+2\overrightarrow{PE_1}+2\overrightarrow{PF_1}$

Поделим обе части на 2 и получим требуемое, ч.т.д.

343. Если $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, то это значит, что $O \in [AB]$ и $AO=OB$, значит A и B симметричны относительно O.

344. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $A_1C \cap CA_1=0$ Найти k — ?

Решение: а) если $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}, k=-1$ б) если $\overrightarrow{AC_1}=k\cdot\overrightarrow{AO}, k=2$

в) если $\overrightarrow{OB_1}=k\cdot\overrightarrow{B_1D}; k=-\frac{1}{2}$

345. Дано: ABCD – параллелограмм, $E \in AB$, $AE = EB$, $F \in BC$, $BF = FC$ Выразить:

а) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$ через $\overrightarrow{EF}$ $\quad \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{EF}$

б) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE}$ через $\overrightarrow{DC}$ $\quad \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

346. Дано: ABCD – трапеция, $M \in AB$, $AM = MB$, $N \in CD$, $CN = ND$

Выразить: $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$ через $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$; $\quad \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{NM}$;

$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}$;

$2\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AM}$; $2\overrightarrow{NM}=0+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}+0$

$\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA})=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$

347. а) $2(\vec{m}+\vec{n})-3(4\vec{m}-\vec{n})+\vec{m}=2\vec{m}+2\vec{n}-12\vec{m}+3\vec{n}+\vec{m}=5\vec{n}-9\vec{m}$

б) $\vec{m}-3(\vec{n}-2\vec{m}+\vec{p})+5(\vec{p}-4\vec{m})=\vec{m}-3\vec{n}+6\vec{m}-3\vec{p}+5\vec{p}-20\vec{m}=$
$=-13\vec{m}-3\vec{n}+2\vec{p}$

348. Доказать: $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=2\overrightarrow{BC}$; Доказательство:

$\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1D}=\overrightarrow{BC}+0+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}$ ч.т.д.

350 Дано: $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – попарно не сонаправлены

Доказать: $|\vec{p}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$; Доказательство: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$, $\vec{c}+\vec{d}=\vec{p}$

$|\vec{d}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$ (св–во неравенство треугольника)

$|\vec{p}|<|\vec{c}|+|\vec{d}|$ (св–во неравенство треугольника)

$\downarrow$

$|\vec{p}|<|\vec{c}|+|\vec{d}|<|\vec{c}|+|\vec{a}|+|\vec{b}|$, ч.т.д.

351. $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны; $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны

Доказать: а) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны Доказательство:

$\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, значит $\vec{a}$ =x $\vec{c}$

$\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, значит $\vec{b}$ =y $\vec{c}$

$\vec{a}+\vec{b}$ =x $\vec{c}$ +y $\vec{c}$ =(x+y) $\vec{c}$, значит($\vec{a}+\vec{b}$)и $\vec{c}$ – коллинеарны , ч.т.д.

б)Доказать: $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны

$\vec{a}-\vec{b}$ =(x–y) $\vec{c}$, значит ($\vec{a}-\vec{b}$)и $\vec{c}$ – коллинеарны , ч.т.д.

в)Доказать: $\vec{a}$ +3 $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны; Доказательство: $\vec{a}$ +3 $\vec{b}$ =x $\vec{c}$

3y $\vec{c}$ =(x+3y) $\vec{c}$, значит ($\vec{a}$ +3 $\vec{b}$)и $\vec{c}$ – коллинеарны , ч.т.д.

г)Доказать:– $\vec{a}$ +2 $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны Доказательство: – $\vec{a}$ +2 $\vec{b}$ =

= –x $\vec{c}$ +2y $\vec{c}$ =(–x+2y) $\vec{c}$, значит(– $\vec{a}$ +2 $\vec{b}$)и $\vec{c}$ – коллинеарны , ч.т.д.

352. Дано: $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ – коллинеарны; Доказать:

а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; Доказательство: $\vec{a}+\vec{b}$ =x($\vec{a}-\vec{b}$);

$\vec{a}+\vec{b}$ =x $\vec{a}$ –x $\vec{b}$; $\vec{a}$ –x $\vec{a}$ = –x $\vec{b}$ – $\vec{b}$; $\vec{a}$ (1–x)= $\vec{b}$ (–1–x)

$\vec{a}=\dfrac{-1-x}{1-x}\vec{b}$, значит $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны ч.т.д.

353. Дано: $\vec{a}$ +2 $\vec{b}$ и $\vec{a}$ –3 $\vec{b}$ – коллинеарны; Доказать:

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; Доказательство: ($\vec{a}$ +2 $\vec{b}$)=x($\vec{a}$ –3 $\vec{b}$);

$\vec{a}$ +2 $\vec{b}$ =x $\vec{a}$ –3x $\vec{b}$; $\vec{a}$ –x $\vec{a}$ =–2 $\vec{b}$ –3x $\vec{b}$; $\vec{a}$ (1–x)= $\vec{b}$ (–2–3x)

$\vec{a}=\dfrac{-2-3x}{1-x}\vec{b}$, значит $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны ч.т.д.

354. Дано: $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ – не коллинеарны; Доказать:

а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны; Доказательство:

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, тогда $\vec{a}$ =x $\vec{b}$;

$\vec{a}+\vec{b}$ =x $\vec{b}$ + $\vec{b}$ = $\vec{b}$ (x+1); $\vec{a}-\vec{b}$ =x $\vec{b}$ – $\vec{b}$ = $\vec{b}$ (x–1);

$$\vec{a}+\vec{b}=\frac{\vec{b}\cdot(x+1)(x-1)}{(x-1)}=\vec{b}(x-1)\cdot\frac{x+1}{x-1}=(\vec{a}-\vec{b})\left(\frac{x+1}{x-1}\right),$$

значит $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию, значит $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

Доказать: б) $\vec{a}$ +2 $\vec{b}$ и 2 $\vec{a}-\vec{b}$ не коллинеарны; Доказательство:

Пусть $\vec{a}$ +2 $\vec{b}$ и 2 $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны, тогда

$\vec{a}$ +2 $\vec{b}$ =x(2 $\vec{a}-\vec{b}$); $\vec{a}$ +2 $\vec{b}$ =2x $\vec{a}$ –x $\vec{b}$; $\vec{a}$ –2x $\vec{a}$ = –2x $\vec{b}$ –x $\vec{b}$

$\vec{a}$ (1–2x)= $\vec{b}$ (–2–x), т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, что неверно(см.а), значит, предположение неверно и $\vec{a}$ +2 $\vec{b}$ не коллинеарен 2 $\vec{a}-\vec{b}$

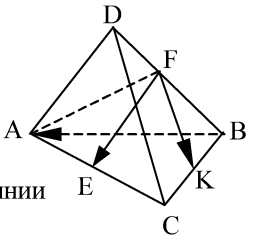
355. а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ — компланарны;

б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ – не компланарны; в) $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DD_1}$ — компланарны

г) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ – не компланарны

356. Дано: ABCD – тетраэдр,

$E \in AC$, $AE = EC$, $F \in BD$, $BF = FD$



Доказать: $2\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$; Доказательство:

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{KE}+2\overrightarrow{FK}=2(\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{KE})=2\overrightarrow{FE}$, ч.т.д.

$\overrightarrow{BA}\uparrow\uparrow\overrightarrow{KE}$ и $|\overrightarrow{BA}|=2|\overrightarrow{KE}|$

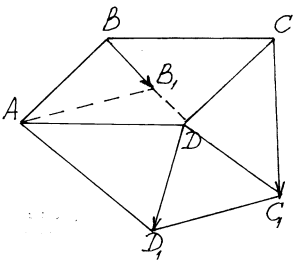
$\overrightarrow{FK}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{FK}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{DC}|$

как средние линии треугольников

т.к. $2\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$, значит, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$ — компланарны

357. Дано: ABCD и $AB_1C_1D_1$ — параллелограммы

Доказать: $\overrightarrow{BB_1}$; $\overrightarrow{CC_1}$; $\overrightarrow{DD_1}$ — компланарны; Доказательство:



$\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AC_1}$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}$

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}$

$\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{CC_1}$ – выразили

$\overrightarrow{CC_1}$ через два других, значит,

$\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ – компланарны, ч.т.д.

358. а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB_1}$

в) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB_1}$

г) $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C}=\overrightarrow{A_1C}$

д) $\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{BD_1}$

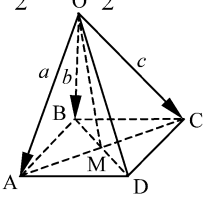
360. а) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}$ б) $\overrightarrow{A_1A}-\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{B_1D_1}$

361. $\overrightarrow{CD}=0\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+0\cdot\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{D_1O}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

363. Дано: ABCDO – пирамида,

ABCD –параллелограмм,

$AC\cap BD=M$, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$



Разложить векторы:

$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$

$\rightarrow \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$

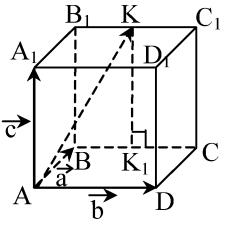
$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+0\cdot\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+0\cdot\vec{b}$

364. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб,

$K \in B_1C_1$; $B_1K = KC_1$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, $AB = m$

Выразить: $\overrightarrow{AK}$, $|\overrightarrow{AK}|$



1) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}$; $\overrightarrow{AK} = \vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

2) $\overrightarrow{AK_1} = \sqrt{AB^2 + BK_1^2} = \sqrt{m^2 + \frac{m^2}{4}} = \frac{m\sqrt{5}}{2}$

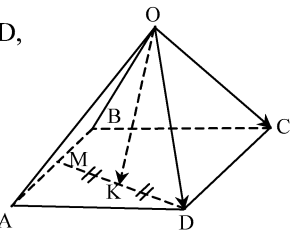
$\overrightarrow{AK} = \sqrt{AK_1^2 + KK_1^2} = \sqrt{\frac{5m^2}{4} + m^2} = \frac{3m}{2}$; $|\overrightarrow{AK}| = \frac{3m}{2}$

365. Дано: ABCD – параллелограмм,

$M \in AB$, $AM = MB$, $K \in MD$, $MK = KD$,

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$;

Разложить $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OK}$;



1) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + 0 \cdot \overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$

2) $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \to \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

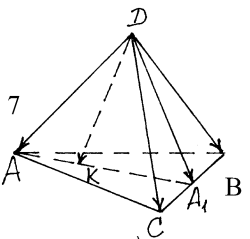
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ | $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b})$

$\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$ | $\to$ $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{b}$

367. Дано: ABCD – тетраэдр,

AA_1 – медиана ΔABC, $K \in AA_1$, $AK : KA_1 = 3 : 7$

Разложить: $\overrightarrow{DK}$ по $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$



$\overrightarrow{DA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$; $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{7}\overrightarrow{KA_1}$, отсюда

$\overrightarrow{DK} = \dfrac{\overrightarrow{DA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{DA_1}}{1 + \frac{3}{7}}$ (см. 349); $\overrightarrow{DK} = \dfrac{\overrightarrow{DA} + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right)}{\frac{10}{7}}$

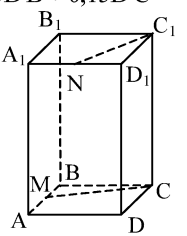
$\overrightarrow{DK} = \frac{7}{10}\overrightarrow{DA} + \frac{3}{20}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{20}\overrightarrow{DC}$, т.е. $\overrightarrow{DK} = 0{,}7\overrightarrow{DA} + 0{,}15\overrightarrow{DB} + 0{,}15\overrightarrow{DC}$

368. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ –

параллелепипед, $M \in AB$,

$AM = MB$, $N \in A_1D_1$, $A_1N = ND_1$

Разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$

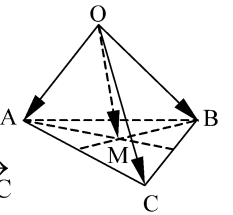


а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

в) $\overrightarrow{C_1N}=\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1N}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$ = невозможно разложить

д) $\overrightarrow{A_1N}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+0\cdot\overrightarrow{AB}$; е) $\overrightarrow{AN}$ = невозможно разложить

ж) $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$



369. Разложить $\overrightarrow{OA}$ по $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}$

т.к. M – точка пересечения медиан,

то пользуясь результатом задачи 366:

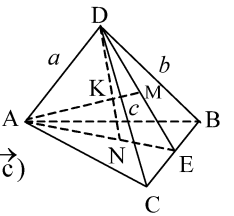
$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$; $3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

370. Дано: ABCD – правильный тетраэдр,

AM, DN – высоты,

$AM\cap DN=K$, $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$



Разложить вектор

а) $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$; $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

б) $\overrightarrow{DK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DN}$; $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

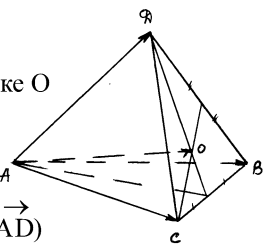
в) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB})=$

$=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{b}$

г) $\overrightarrow{MK}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{4}\vec{}-\frac{1}{12}\vec{c}-\frac{1}{12}\vec{b}$

371. Дано: ABCD – тетраэдр

Медианы грани BCD пересекаются в точке O



Доказать: $|\overrightarrow{AO}|<\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|)$

Доказательство:

$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

в задаче 350 было доказано, что если $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$,

то $|\vec{p}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$, значит $|\overrightarrow{AO}|<\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|)$, ч.т.д.

373. Дано: $AA_1\perp\alpha$; $BB_1\perp\alpha$; $CC_1\perp\alpha$, $MM_1\perp\alpha$,

M – точка пересечения медиан ΔABC;

Доказать: $\overrightarrow{MM_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1})$ Доказательство:

$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1M_1}$; $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M_1}$

$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1M_1}$

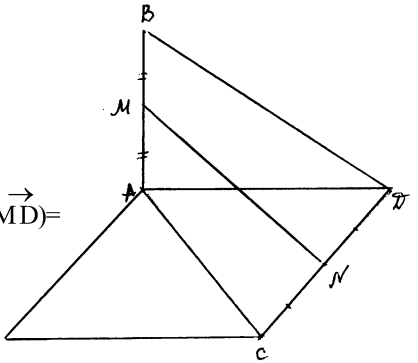
$3\overrightarrow{MM_1}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1})+(\overrightarrow{A_1M_1}+\overrightarrow{B_1M_1}+\overrightarrow{C_1M_1})$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-$

$-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=0$

аналогично $\overrightarrow{A_1M_1}+\overrightarrow{B_1M_1}+\overrightarrow{C_1M_1}=0$, значит $3\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}$

$\overrightarrow{MM_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1})$, ч.т



374. Дано: AB, CD $\notin \alpha$, M $\in$ AB, AM=MB, N$\in$CD, CN=ND

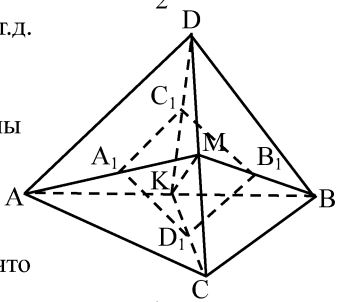
Доказать: $MN<\frac{1}{2}(AC+BD)$

Доказательство: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})=$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD})=$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BD})=$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$; т.к. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$, то $|\overrightarrow{MN}|<\frac{1}{2}(|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{BD}|)$ (ранее доказано в задаче 350), ч.т.д.



375. Дано: ABCD – тетраэдр, K $\in$ AB, AK=KB, M $\in$ DC, DM=MC, A_1, B_1, C_1, D_1 – середины AM, MB, KD, KC

Доказать: $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм

Доказательство: Если докажем, что $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{C_1B_1}$, то $A_1B_1C_1D_1$ – плоский 4–х угольник

1) $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB_1}$ (*)

2) $\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD_1}$; $\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{D_1M}+\overrightarrow{MC_1}$; $\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{C_1M}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB_1}$

$\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD_1}+\overrightarrow{D_1M}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{C_1M}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB_1}=$

$=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB_1}$ (**); Сравним (*) и (**), получим

$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{C_1B_1}$, $A_1B_1=\frac{1}{2}AB$; $A_1B_1 \,||\, AB$ (как средняя линия треугольника AMB) и $MK \cap A_1B_1=0$; причем $A_1O=OB_1$;

$C_1D_1=\frac{1}{2}DC$ и $C_1D_1 \,||\, CD$ (как средняя линия треугольника DKC) и $C_1D_1 \cap MK=0$; причем $D_1O=OC_1$

Вывод: $A_1B_1C_1D_1$ – четырехугольник, у которого диагонали точками пересечения делятся пополам – параллелограмм.

376. а) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{M_1Q_1}=\overrightarrow{N_1P_1}+\overrightarrow{NP}$; т.к. $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{M_1Q_1}$, то $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{M_1Q_1}=2\overrightarrow{MQ}$

аналогично $\overrightarrow{N_1P_1}+\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{NP}$;

т.к. $\overrightarrow{MQ}\uparrow\uparrow\overrightarrow{NP}$ и $|\overrightarrow{MQ}|=|\overrightarrow{NP}|$, то $2\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{MQ}$

б) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP_1}=\overrightarrow{NQ_1}$; $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP_1}=\overrightarrow{NQ_1}$; $\overrightarrow{NQ_1}=\overrightarrow{NQ_1}$ ч.т.д.

в) $\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{QQ_1}=\overrightarrow{QP_1}$; $\overrightarrow{QQ_1}+\overrightarrow{Q_1P_1}=\overrightarrow{QP_1}$; $\overrightarrow{QP_1}=\overrightarrow{QP_1}$ ч.т.д.

377. а) $\underline{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DB}}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$

б) $\underline{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EC}}$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EC}$

в) $\underline{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AF}}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AO_1}+2\overrightarrow{AO_2}=4\overrightarrow{AO_3}=2\overrightarrow{AF}$

378. Докажите, что разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается формулой $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Обозначим через $\vec{c}$ вектор $\vec{a}+(-\vec{b})$ и докажем, что $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$. Сгласно определению разности векторов, нужно доказать что $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. $\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+(-\vec{b}))+\vec{b}=\vec{a}+((-\vec{b}))+\vec{b})=\vec{a}+\vec{0}$, значит, $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. ч.т.д.

379. а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=0$

380. а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{AD_1}$

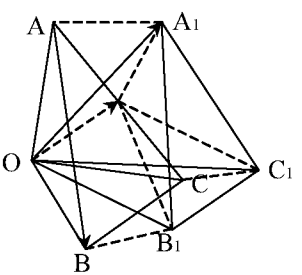
б) $\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD_1}=$

$=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$

в) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=DB$.

Ответ. а) $\overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$.

381. Даны треугольники ABC, $A_1B_1C_1$ и две точки O и P пространства. Известно, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC_1}$. Докажите, что стороны треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно равны и парраллельны сторонам треугольника ABC.



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}$; $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB_1}$; $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC_1}$; $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OB_1}$; $\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1B_1}$

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{OC_1}$ $\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1C_1}$;

$\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{OC_1}$;

Сложим равенства

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}\\ -\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}\\ \hline \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{AB}\end{array}$$

; $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{AB}$, отсюда $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$.

Раз $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, сложим равенства.

$-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}$

$\overline{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OA_1}}$; $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OA_1}$, отсюда $\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AC}$. Раз $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$, то $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{A_1C_1}\right|$. Из равенства $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ следует, что AB $\|\, A_1B_1$, а из равенства $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$ следует, что AC$\|\, A_1C_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAC=\angle B_1A_1C_1$ как углы с соответсттвенно параллельными и одинаково направленными сторонами. Вывод: $\triangle BAC=\triangle B_1A_1C_1$ по первому признаку. Осталось доказать, что BC$\|\, B_1C_1$.

$AB+BC=AC$; $A_1B_1+B_1C_1+A_1C_1$ Раз $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$, то и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$ поэтому BC$\|\, B_1C_1$.

382. При каких значениях k в равенстве $\vec{a}=k\vec{b}$, где $\vec{b}\neq\vec{0}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а) коллинеарны; б) сонаправлены; в) противоположно направлены; г) являются противоположными?

$\vec{a}=k\vec{b}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$. а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны при любых значениях k;

б) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, если k≥0;

в) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, если k<0;

г) $\vec{a}=-\vec{b}$, если k= –1.

Ответ:а) k - любое число; б) k≥0; в) k<0; г) k= –1.

383. Числа k и l не равны друг другу. Докажите, что если векторы $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{a}+l\vec{b}$ не коллинеарны, то а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны; б) векторы $\vec{a}+k_1\vec{b}$ и $\vec{a}+l_1\vec{b}$ не коллинеарны при любых неравных числах k_1 и l_1.

а) Предположим, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут все-таки коллинеарны, то есть $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$. Тогда $\vec{a}+k\vec{b}=\vec{a}+\kappa\lambda\vec{a}=\vec{a}(1+\kappa\lambda)$, и
$\vec{a}+l\vec{b}=\vec{a}+l\lambda\vec{a}=(1+l\lambda)$.

Получили, что векторы $(1+\kappa\lambda)\vec{a}$ и $(1+l\lambda)\vec{a}$ коллинеарны, значит и соответствующие им векторы $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{a}+l\vec{b}$ коллинеарны, что противоречит условию задачи.

Вывод: предположение неверно, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

б) Предположим, что $\vec{a}+k_1\vec{b}$ и $\vec{a}+l_1\vec{b}$ все-таки коллинеарны, тогда $\vec{a}+k_1\vec{b}=\lambda(\vec{a}+l_1\vec{b})$, $\vec{a}(1-\lambda)=\vec{b}(\lambda l_1-k_1)$, $\vec{b}=\dfrac{1-\lambda}{\lambda l_1-k_1}\cdot\vec{a}$,обозначим $\mu=\dfrac{1-\lambda}{\lambda l_1-k_1}$, тогда $\vec{b}=\mu\cdot\vec{a}$ В этом случае $\vec{a}+k\vec{b}=\vec{a}+k\mu\vec{a}=\vec{a}(1+k\mu)$, $\vec{a}+l\vec{b}=\vec{a}+l\mu\vec{a}=\vec{a}(1+l\mu)$, то есть векторы $(1+k\mu)\vec{a}$ и $(l+l\mu)\vec{a}$ - коллинеарны, и соответствующие им векторы $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{a}+l\vec{b}$ - тоже коллинеарны. А это противоречит условию задачи.

Вывод: предположение неверно, векторы $\vec{a}+k_1\vec{b}$ и $\vec{a}+l_1\vec{b}$ не коллинеарны.

384. Точки A_1B_1 и C_1 - середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC, точка O - произвольная точка пространства Докажите, что

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{A_1B}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, поэтому

$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB}$, отсюда $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA_1}$.

Запишем похожие равенства для двух других боковых граней.

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OC_1}$.

Складывая три последние равенства, получаем:

$2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=2\cdot(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})$,

что доказывает справедливость равенства

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

385. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника ABCD, пересекаются в точке M. Точка O - произвольная точка пространства. Докажите, что

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

Для произвольного $\triangle$ PQR

$2\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}$.

Запишем равенство для каждой грани пирамиды OABCD.

$2\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$,

$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}$,

$2\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$,

$2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Сложив их, получим:

$2(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON})=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$,

или $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

Для $\triangle$ OKL имеем $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}$.

Для $\triangle$ OMN имеем $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

Итак, $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{OM}=4\overrightarrow{OM}$, поэтому

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

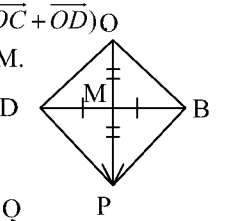
386. Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Докажите, что для любой точки M пространства справедливо неравенство MO $<\frac{1}{4}$ (MA+MB+MC+MD).

Для $\triangle$ AOC имеем $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$;

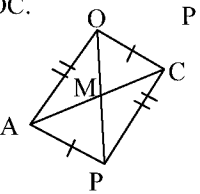
для $\triangle$ DOC имеем $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}$

(так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам). Сложим равенства, получаем:

$4\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

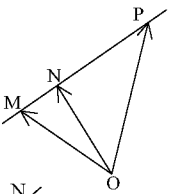


Достроим $\triangle$ DOB до параллелограмма: OP=2·OM.
В $\triangle$ DOP имеем OP<OD+OB,OP<OD+OB
2·OM<OD+DP, $2\cdot|\overrightarrow{OM}|<|\overrightarrow{OD}|+|\overrightarrow{OB}|$
Достроим $\triangle$ AOC до параллелограмма:
OP=2·OM, OP<OA+OC или 2·OM<OA+OC.
$2\cdot|\overrightarrow{OM}|<|\overrightarrow{AO}|+|\overrightarrow{OC}|$

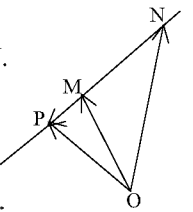


Сложим неравенства:
2·OM<OD+OB
2·OM<OA+OC
4·OM<OA+OB+OC+OD,
окончательно, $OM<\frac{1}{4}(OA+OB+OC+OD)$.

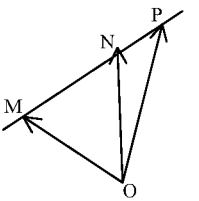
387. Три точки M, N и P лежат на одной прямой, а точка O не лежит на этой прямой. Выразите вектор $\overrightarrow{OP}$ через векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$, если: а) $\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{MP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$; в) $\overrightarrow{MP}=k\overrightarrow{MN}$, где k - данное число.



а) $\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{MN}$.
$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$,
$\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{ON}+2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{OP}$,
$\overrightarrow{ON}+2\cdot(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OP}$,
$3\overrightarrow{ON}-2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}$.



б) Точка M - середина отрезка PN.
$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON})$,
$2\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON})$,
$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$.



в) $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}$,
$\overrightarrow{MP}=k\cdot\overrightarrow{MN}$. Пусть $\overrightarrow{NP}=\lambda\cdot\overrightarrow{MN}$, тогда
$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MN}+\lambda\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}(1+\lambda)=\overrightarrow{MN}\cdot k$,
откуда $1+\lambda=k$, $\lambda=k-1$.
Итак, $\overrightarrow{NP}=(k-1)\cdot\overrightarrow{MN}=(k-1)(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$,
$\overrightarrow{ON}+(k-1)(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OP}$;
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+k\cdot\overrightarrow{ON}-k\cdot\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}=k\cdot\overrightarrow{ON}+(1-k)\cdot\overrightarrow{OM}$.
Ответ: а) $\overrightarrow{OP}=3\cdot\overrightarrow{ON}-2\cdot\overrightarrow{OM}$; б) $\overrightarrow{OP}=2\cdot\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$;
в) $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{ON}+(1-k)\cdot\overrightarrow{OM}$.

388. Докажите, что векторы $\vec{p}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны, если а) один из данных векторов нулевой; б) два из данных векторов коллинеарны. а) Вектор $\vec{0}$ будет компланарным к любому вектору; точки начала двух других векторов всегда можно совместить параллельным переносом, так как через две пересекающиеся прямые проходит ровно одна плоскость.

б) Если два вектора коллинеарны, то они расположены либо на параллельных прямых, либо на одной прямой. (Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость, параллельным переносом прямые можно совместить.) Начало третьего вектора можно параллельным переносом совместить с любой точкой на прямой, на которой лежат два коллинеарных вектора. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость, то есть 3 вектора компланарны.

389. На двух скрещивающихся прямых отмечены по 3 точки: A_1, A_2, A_3, и B_1, B_2, B_3, причем $\overrightarrow{A_1A_2}=k\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{B_1B_2}=k\cdot\overrightarrow{B_1B_3}$. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, параллельны некоторой плоскости. Обозначим для краткости $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{x}$, $\overrightarrow{A_3B_3}=\vec{y}$, $\overrightarrow{A_2B_2}=\vec{z}$.

$\vec{x}+\overrightarrow{B_1B_3}=\overrightarrow{A_1A_3}+\vec{y}$, (1) $\qquad$ $\vec{y}+\overrightarrow{B_3B_2}=\overrightarrow{A_3A_2}+\vec{z}$. (2)

По условию, $\overrightarrow{A_1A_2}=k\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{B_1B_2}=k\cdot\overrightarrow{B_1B_3}$;

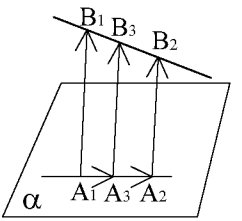
$\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_2}=\overrightarrow{A_1A_2}=k\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$, отсюда $\overrightarrow{A_3A_2}=\overrightarrow{A_1A_3}(k-1)$.

$\overrightarrow{B_1B_3}+\overrightarrow{B_3B_2}=\overrightarrow{B_1B_2}=k\cdot\overrightarrow{B_1B_3}$, отсюда $\overrightarrow{B_3B_2}=(k-1)\cdot\overrightarrow{B_1B_3}$.

Подставим эти выражения и равенства (1) и (2).

$\vec{x}+\overrightarrow{B_1B_3}=\overrightarrow{A_1A_3}+\vec{y}$ (3)

$\vec{y}+(k-1)\overrightarrow{B_1B_3}=\overrightarrow{A_1A_3}(k-1)+\vec{z}$ (4)



Из $\overrightarrow{B_1B_3}-\overrightarrow{A_1A_3}=\vec{y}-\vec{x}$

Упростим (4).

$\vec{y}+k\overrightarrow{B_1B_3}-\overrightarrow{B_1B_3}=\overrightarrow{A_1A_3}\cdot k-\overrightarrow{A_1A_3}+\vec{z}$,

$\vec{y}+k(\overrightarrow{B_1B_3}-\overrightarrow{A_1A_3})=(\overrightarrow{B_1B_3}-\overrightarrow{A_1A_3})+\vec{z}$,

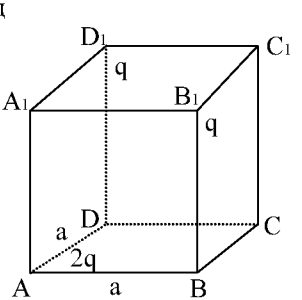
$\vec{y}+k(\vec{y}-\vec{x})=\vec{y}-\vec{x}+\vec{z}$,

$k\vec{y}-k\vec{x}=-\vec{x}+\vec{z}$, $\vec{x}(k-1)-k\vec{y}+\vec{z}=0$, или $\vec{z}=k\vec{y}-\vec{x}(k-1)=k\vec{y}+(1-k)\vec{x}$.

Это равенство доказывает компланарность векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всегда в пространстве найдется плоскость, параллельная плоскости, в которой лежат эти три вектора.

390. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором AB=AD=a, AA_1=2a. В вершинах B_1 и D_1 помещены заряды q, а в вершине A - заряд 2q. Найдите абсолютную величину результирующей напряженности электрического поля: а) в точке A_1; б) в точке C; в) центре грани $A_1B_1C_1D_1$; г) в центре грани ABCD.



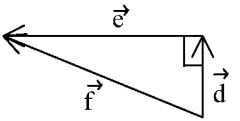
а) $\vec{E}(A_1)=\dfrac{k\cdot 2q}{AA_1^3}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{k\cdot q}{B_1A_1^3}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}+\dfrac{k\cdot q}{D_1A_1^3}\cdot\overrightarrow{D_1A_1}=$

$=\dfrac{k\cdot 2q}{8a^3}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{kq}{a^3}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}+\dfrac{kq}{a^3}\cdot\overrightarrow{D_1A_1}=\dfrac{kq}{a^3}(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{D_1A_1})$.

Пусть $\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}=\vec{d}$, $\left|\vec{d}\right|=\frac{1}{4}\cdot 2a=\frac{a}{2}$.

$\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=-\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1D_1}=-(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1})=-\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{C_1A_1}$,

$\left|\overrightarrow{C_1A_1}\right|=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$. $\vec{d}+\overrightarrow{C_1A_1}$ есть сумма двух взаимно перпендикулярных векторов.



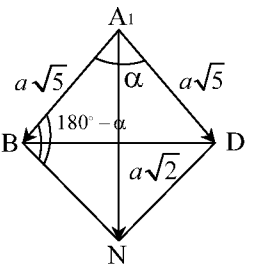
Пусть $\vec{e}=\overrightarrow{C_1A_1}$, тогда $\vec{e}+\vec{d}=\vec{f}$

$\left|\vec{f}\right|=\sqrt{\left|\vec{e}\right|^2+\left|\vec{d}\right|^2}=\sqrt{2a^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}}=\frac{3a}{2}$, $\left|\vec{E}(A_1)\right|=\frac{kq}{a^3}\cdot\frac{3a}{2}=\frac{3kq}{2a^2}$.

б) $\vec{E}(C)=\frac{k\cdot 2q}{AC^3}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{kq}{D_1C^3}\cdot\overrightarrow{D_1C}+\frac{kq}{B_1C^3}\cdot\overrightarrow{B_1C}=\frac{k\cdot 2q}{a^3\cdot 2\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}+$

$+\frac{kq}{5a^3\cdot\sqrt{5}}\overrightarrow{D_1C}+\frac{kq}{a^3\cdot 5\sqrt{5}}\overrightarrow{B_1C}=\frac{kq}{a^3}\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\sqrt{2}}+\frac{\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{D_1C}}{5\sqrt{5}}\right)=$

$=\frac{kq}{a^3}\left(\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{\sqrt{2}}+\frac{\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{A_1B}}{5\sqrt{5}}\right)$.



$A_1D=A_1B=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{5}$; ABND - ромб.

$\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1D}=\overrightarrow{A_1N}$.

По теореме косинусов из $\triangle BA_1D$

$(a\sqrt{2})^2=(a\sqrt{5})^2+(a\sqrt{2})^2-2\,a\sqrt{5}\cdot a\sqrt{5}\cos\alpha$;

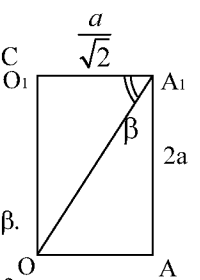
$2a^2=10a^2-10a^2\cos\alpha$, $10\cos\alpha=8$; $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

Из $\triangle A_1BN$

$\left|\overrightarrow{A_1N}\right|^2=(a\sqrt{5})^2+(a\sqrt{5})^2-2\cdot a\sqrt{5}\cdot a\sqrt{5}\cdot\cos(180°-\alpha)=10a^2+10a^2\cdot\cos\alpha=$

$=10a^2+10a^2\cdot\frac{4}{5}=18a^2$; $\left|\overrightarrow{A_1N}\right|=3\sqrt{2}a$

Пусть $\vec{e}=\frac{\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{A_1B}}{5\sqrt{5}}=\frac{\overrightarrow{A_1N}}{5\sqrt{5}}$, тогда $\left|\vec{e}\right|=\frac{\overrightarrow{A_1N}}{5\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}a}{5\sqrt{5}}$



Пусть $\vec{d}=\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{\sqrt{2}}$, тогда $\left|\vec{d}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{A_1C_1}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=a$.

Определим угол между векторами $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_1N}$ - угол β.

$\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{1}{OA_1}$; $OA_1=\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+4a^2}=\sqrt{\frac{a}{2}+4a^2}=\frac{3a}{\sqrt{2}}$;

$\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3a}=\frac{1}{3}$.

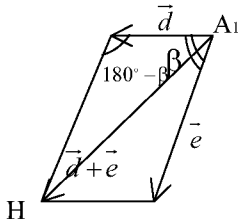
Найдем $\left|\vec{d}+\vec{e}\right|$. $\overrightarrow{A_1H}=\vec{d}+\vec{e}$;

$$\left|\overrightarrow{A_1H}\right|^2=\left|\vec{d}\right|^2+\left|\vec{e}\right|^2-2\left|\vec{d}\right|\left|\vec{e}\right|\cos(180°-\beta)=$$

$$=a^2+a^2\cdot\frac{18}{125}+\frac{2\cdot3\sqrt{2}\cdot a^2}{5\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{143a^2}{125}+\frac{2\sqrt{2}a^2}{5\sqrt{5}}=\frac{143a^2}{125}+\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot5\sqrt{5}}{(5\sqrt{5})^2}a^2=$$

$$=\frac{143+10\sqrt{10}}{125}a^2$$



Окончательно, $\left|\vec{E}(C)\right|=\frac{kq}{a^3}\cdot\frac{a}{5\sqrt{5}}\sqrt{143+10\sqrt{10}}=\frac{kq}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{143+10\sqrt{10}}}{5\sqrt{5}}$.

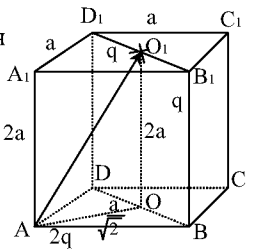
$$\vec{E}(O_1)=\frac{kq}{D_1O_1^3}\cdot\overrightarrow{D_1O_1}+\frac{kq}{B_1O_1^3}\cdot\overrightarrow{B_1O_1}+\frac{k\cdot2q}{AO_1^3}\cdot\overrightarrow{AO_1}=\frac{kq}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3}(\overrightarrow{D_1O_1}+\overrightarrow{B_1O_1})+$$

$$+\frac{k\cdot2q}{\left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^3}\overrightarrow{AO_1};$$

$\overrightarrow{D_1O_1}=-\overrightarrow{B_1O_1}$, поэтому остается

$$\vec{E}(O_1)=\frac{k\cdot2q}{27a^3}\cdot2\sqrt{2}\cdot\overrightarrow{AO_1},$$

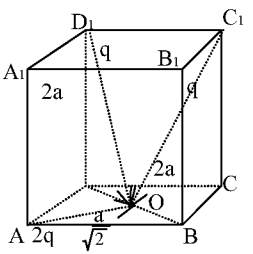
$$\left|\vec{E}(O_1)\right|=\frac{4\sqrt{2}kq}{27a^3}\cdot\frac{3a}{\sqrt{2}}=\frac{4}{9a^3}\cdot kq.$$



г) $\vec{E}(O)=\frac{kq}{D_1O^3}\cdot\overrightarrow{D_1O}+\frac{kq}{B_1O^3}\cdot\overrightarrow{B_1O}+\frac{k\cdot2q}{AO^3}\cdot\overrightarrow{AO}$,

$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $D_1O_1=B_1O_1=\frac{3a}{\sqrt{2}}$,

$$\vec{E}(O)=\frac{kq}{\left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^3}(\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{B_1O})+\frac{2\cdot k\cdot q}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3}\overrightarrow{AO}=$$



$$=\frac{kq\cdot2\sqrt{2}}{27a^3}(\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{B_1O})+\frac{4\sqrt{2}kq}{a^3}\overrightarrow{AO}=\frac{kq}{a^3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{27}\cdot(\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{B_1O})+4\sqrt{2}\overrightarrow{AO}\right).$$

Найдем сумму $\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{B_1O}$. Параллельно перенесем B_1O, чтобы т. B_1 совпала с т. D_1.

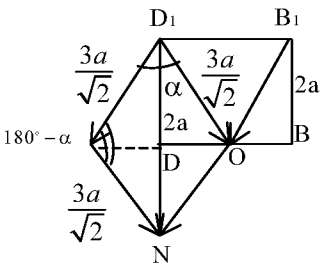
Получим вектор $\overrightarrow{D_1E}$.

$\overrightarrow{B_1O}+\overrightarrow{D_1O}=\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{D_1E}=\overrightarrow{D_1N}$.

Из $\triangle OD_1E$ по теореме косинусов

$$2a^2=2\cdot\frac{9a^2}{2}-2\cdot\frac{9a^2}{2}\cdot\cos\alpha,$$

$$9\cos\alpha=7,\ \cos\alpha=\frac{7}{9}.$$



Из $\triangle D_1EN$ по теореме косинусов $\left|\overrightarrow{D_1N}\right|^2 = 2\cdot\frac{9a^2}{2} - 2\cdot\frac{9a^2}{2}\cdot\cos(180^\circ-\alpha) =$

$) = 9a^2 + 9a^2\cdot\frac{7}{9} = 9a^2 + 7a^2 = 16a^2$, $\left|\overrightarrow{D_1N}\right| = 4a$.

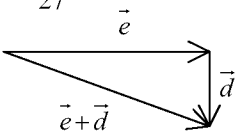
Пусть $\vec{d} = \frac{2\sqrt{2}}{27}(\overrightarrow{D_1O} + \overrightarrow{B_1O}) = \frac{2\sqrt{2}}{27}\overrightarrow{D_1N}$, тогда $\left|\vec{d}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{27}\cdot 4a = \frac{8\sqrt{2}a}{27}$.

Пусть $\overrightarrow{AO}\,4\sqrt{2} = \vec{e}$, тогда $\left|\vec{e}\right| = 4\sqrt{2}\,\frac{a}{\sqrt{2}} = 4a$.

Найдем $\left|\vec{d}+\vec{e}\right|$. $\left|\vec{e}+\vec{d}\right|^2 = \left|\vec{e}\right|^2 + \left|\vec{d}\right|^2 = (4a)^2 + (\frac{8\sqrt{2}a}{27})^2 =$

$= 16a^2 + \frac{128a^2}{729} = \frac{11664+128}{729}a^2 =$

$= \frac{11792}{729}a^2 = \frac{16\cdot 737}{729}a^2$

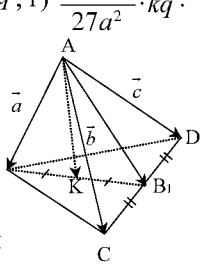


Окончательно, $\left|\vec{e}+\vec{d}\right| = \sqrt{\frac{16\cdot 737}{729}a^2} = \frac{4\sqrt{737}a}{27}$,

$\left|\vec{E}(O)\right| = \frac{kq}{a^3}\cdot\frac{4\sqrt{737}a}{27} = \frac{4\sqrt{737}}{27a^2}\cdot kq$.

Ответ: а) $\frac{3}{2a^2}\cdot kq$; б) $\frac{\sqrt{143+10\sqrt{10}}}{5\sqrt{5}a^2}\cdot kq$; в) $\frac{4}{9a^2}\cdot kq$; г) $\frac{4\sqrt{737}}{27a^2}\cdot kq$.

391. В тетраэрде ABCD точка K - середина медианы BB_1 грани BCD. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \vec{c} = \overrightarrow{AD}$.



Проведем $\overrightarrow{AB_1}$. Точка K - середина отрезка BB_1, поэтому имеет свое равенство $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \overrightarrow{AB_1})$.

Достроим $\triangle$ ACD до параллерограмма, складывая $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AD}$ по правилу парвлллелограмма получим что их сумма $\vec{b}+\vec{c}$ равна вектору - диагонали параллерограмма, выходящей из вершины A. Но эта диагональ равна $2\cdot\overrightarrow{AB_1}$ (по свойству диагоналей параллерограмма).

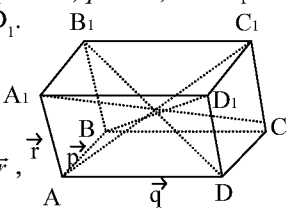
Значит, $\vec{b}+\vec{c} = 2\cdot\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AB_1} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$.

Итак, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

Ответ: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

392. На трех некомпланарных векторах $\vec{p} = \overrightarrow{AB}, \vec{q} = \overrightarrow{AD}, \vec{r} = \overrightarrow{AA_1}$ построен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

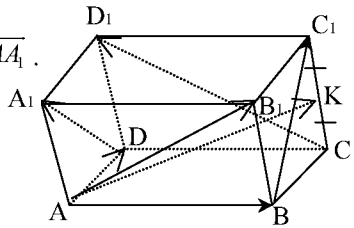
Разложите по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ векторы, образованные диагоналями этого параллелепипеда.



$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{CC_1} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$,

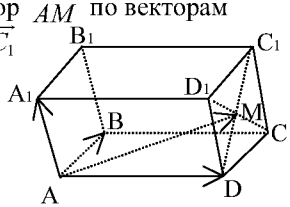
$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} =$
$= -(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AA_1} = -\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$,
$\overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B_1B} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = -\vec{r} + (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\vec{r} - \vec{p} + \vec{q}$;
$\overrightarrow{DB_1} = -\overrightarrow{B_1D} = \vec{r} + \vec{p} - \vec{q}$; $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \vec{r} = \vec{q} - \vec{p} + \vec{r}$.
Ответ: $\overrightarrow{AC_1} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$,
$\overrightarrow{CA_1} = -\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$, $\overrightarrow{BD_1} = \vec{q} - \vec{p} + \vec{r}$, $\overrightarrow{DB_1} = \vec{r} + \vec{p} - \vec{q}$.

393. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка к - середина ребра CC_1. Разложите вектор а) $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$ по векторам $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{CD_1}$.



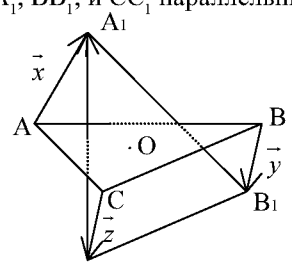
$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.
б) $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1}$, отсюда
$-\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$.
$\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{CD_1}$, отсюда
$\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CD_1} - \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{CD_1} + \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$.
Ответ: а) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD_1}$.

394. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали грани DCC_1D_1 пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$. $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC_1}$
$\overrightarrow{DM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC_1}$.



$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Ответ: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

395. Докажите, что если точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают, то прямые AA_1, BB_1, и CC_1 параллельны некоторой плоскости.

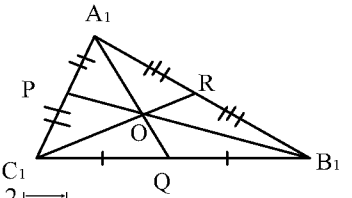


Обозначим т. O – точку пересечения медиан $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{x}, \overrightarrow{BB_1} = \vec{y}, \overrightarrow{CC_1} = \vec{z}$ (для краткости записи). Если точка O - точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а S - произвольная точка пространства, то $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$. Для данной задачи т. O - точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точки C_1 и B_1 - некоторые точки пространства. $\overrightarrow{C_1O} = \frac{1}{3}(-\vec{z} + \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{C_1B})$, $\overrightarrow{B_1O} = \frac{1}{3}(-\vec{y} + \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{B_1A})$.
Сложим эти равенства с третьим: $\overrightarrow{A_1O} = \frac{1}{3}(-\vec{x} + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C})$.
Получим:
$A_1O + B_1O + C_1O = \frac{1}{3}(-x + A_1B + A_1C - z + C_1A + C_1B - y + B_1C + B_1A)$ (1)
Докажем, что $\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{B_1O} + \overrightarrow{C_1O} = \vec{0}$, или $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{A_1Q}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_1B_1})$.

$\overrightarrow{C_1R}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1B_1})$,

$\overrightarrow{B_1P}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1})$;



$\left|\overrightarrow{OA_1}\right|=\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{QA_1}\right|$, $\left|\overrightarrow{OC_1}\right|=\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{RC_1}\right|$, $\left|\overrightarrow{OB_1}\right|=\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{PB_1}\right|$;

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{RC_1})=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{A_1Q}+\overrightarrow{B_1P}+\overrightarrow{C_1R})=$

$=-\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_1B_1})+(\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1B_1}))=$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1B_1})=\vec{0}$.

Итак, возвращаяс к равенству (1), имеем:

$0=\frac{1}{3}(-x+A_1B+A_1C-z+C_1A+C_1B-y+B_1C+B_1A)$,

$\overrightarrow{A_1B}=-\vec{x}+\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{C_1A}=-\vec{z}+\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{A_1C}=-\vec{x}+\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{C_1B}=-\vec{z}+\overrightarrow{CB}$;

$\overrightarrow{B_1A}=-\vec{y}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}=-\vec{y}+\overrightarrow{BC}$

$\vec{0}=-\vec{x}+(-\vec{x})+\overrightarrow{AB}+(-\vec{x})+\overrightarrow{AC}-\vec{z}+(-\vec{z})+\overrightarrow{CA}+(-\vec{z})+\overrightarrow{CB}-\vec{y}+(-\vec{y})+$

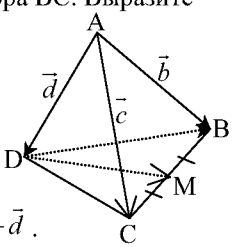
$+\overrightarrow{BC}+(-\vec{y})+\overrightarrow{BA}$, $\vec{0}=-3^x+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3^z+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-3^y+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$;

$\vec{0}=-3\vec{x}-3\vec{y}-3\vec{z}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC})$,

$\vec{0}=-3\vec{x}-3\vec{y}-3\vec{z}+\vec{0}$, x+y+z=0, $\vec{z}=-1\vec{x}-1\vec{y}$.

Вывод: все три вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ компланарны, следовательно, в пространстве существует плоскость, параллельная той, в которой лежат три данных вектора.

396. В тетраэрде ABCD точка M - середина ребра BC. Выразите через векторы $\vec{b}=\overrightarrow{AB},\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{d}=\overrightarrow{AD}$ следующие векторы: $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DM}$.



$\vec{b}+\overrightarrow{BC}=\vec{c},\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$,

$\vec{c}+\overrightarrow{CD}=\vec{d},\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}$,

$\vec{d}+\overrightarrow{DB}=\vec{b},\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{d}$;

$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{d}+\vec{c}-\vec{d})=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{d}$.

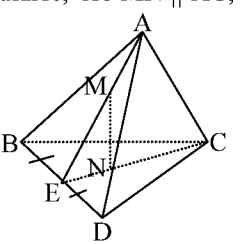
Ответ: $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b},\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c},\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{d},\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{d}$.

397. В тетраэрде ABCD точки M и N являются соответственно точками пересечения граней ADB и BCD. Докажите, что MN || AC, и найдите отношение длин этих отрезков.

Проведем медианы AE и CE. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}$,

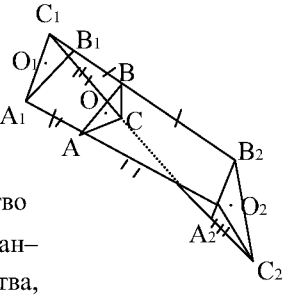
$\overrightarrow{AE}=3\cdot\overrightarrow{ME},\overrightarrow{EC}=3\cdot\overrightarrow{EN},\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{MN}$,

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=3\cdot\overrightarrow{ME}+3\cdot\overrightarrow{EN}=3\cdot(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EN})=3\cdot\overrightarrow{MN}$.



Итак, $3\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}$, поэтому $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AC}$ – коллинеарны, то есть параллельны, MN||AC. $\frac{MN}{AC}=\frac{1}{3}$. Ответ:1/3.

398. Треугольники ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены так, что токчи A, B, C являются серединами отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ лежат на одной прямой.Пусть точки O_1, O,O_2 - точки пересечения медиан соответствующих треугольников.



Если медианы в $\triangle$ PQR пересекаются в точке O, а S - произвольная точка пространства, тогда имеет место равенство $\overrightarrow{SO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{SQ}+\overrightarrow{SR})$.Запишем его для данной задачи. Пусть т. O - точка пространства,

тогда по отношению к $\triangle A_1B_1C_1$ $\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})$.

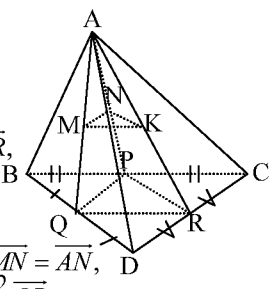
По отношению к $\triangle A_2B_2C_2$: $\overrightarrow{OO_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2})$.

$\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OO_2}=\frac{1}{3}((\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})+(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2})+(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}))$.

Для вычисления скобок используем тот факт, что если точка M – середина отрезка AB, то для любой точки O справедливо векторное равенство $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. Итак, $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=2\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}=2\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}=2\cdot\overrightarrow{OC}$. $\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OO_2}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{2}{3}\cdot\vec{0}=\vec{0}$

(см.это док–во в решении задачи 395). Итак, $\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OO_2}=\vec{0}$, что доказывает коллинеарность $\overrightarrow{OO_1}$ и $\overrightarrow{OO_2}$, а наличие у них общей т. O указывает на то, что все 3 (·) O, O_1, O_2 лежат на одной прямой.

399. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются точки пересечения медиан боковых граней тетраэрда, подобен основанию тетраэдра. Пусть медианы боковых граней пересекаются в точках M, N, K. Проведем медианы AP, AQ,AR; PQ, PR, QR - средние линии $\triangle$ ABC.



$\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{AR},\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AQ}$,

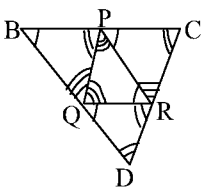
$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AR},\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$,

$\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{MK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AR},\overrightarrow{MK}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AQ})=\frac{2}{3}\overrightarrow{QR}$,

следовательно, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{QR}$ коллинеарны, то есть MK||QR||BC.

Далее, $\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AP},\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}$,

или $\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP},\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ})=\frac{2}{3}\overrightarrow{QP}$,



поэтому $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{QP}$ коллинеарны, то есть MN||QP||BC, точно также MK||PR||BD.

Итак, $\triangle$ MNK~ $\triangle$ QPR. $\triangle$ PQR ~ $\triangle$ DCB, а раз $\triangle$ NMK ~ $\triangle$ PQR, то и $\triangle$ NMK ~ $\triangle$ DCB.ч.т.д.