1. $\alpha^\circ = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$ рад **а)** $45^\circ = \frac{45^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$ рад.; $36^\circ = \frac{36^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{5}$ рад.

$180^\circ = \frac{180^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \pi$ *рад.* **Ответ:** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{5}$; π рад.

б) $120^\circ = \frac{120^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$ рад.; $310^\circ = \frac{310^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 1\frac{13}{18}\pi$ рад.

$360^\circ = \frac{360^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 2\pi$ рад. **Ответ:** $\frac{2\pi}{3}$; $1\frac{13}{18}\pi$; 2π рад.

в) $60^\circ = \frac{60^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$ рад.; $72^\circ = \frac{72^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{5}$ рад.

$270^\circ = \frac{270^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{2}$ рад. **Ответ:** $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{2}$ рад.

г) $150^\circ = \frac{150^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6}$ рад.; $216^\circ = \frac{216^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 1\frac{1}{5}\pi$ рад.

$90^\circ = \frac{90^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$ рад. **Ответ:** $\frac{5\pi}{6}$; $1\frac{1}{5}\pi$; $\frac{\pi}{2}$ рад.

2. $n_{рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot n$ **а)** $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi \cdot 180^\circ}{3 \cdot \pi} = 60^\circ$; $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi \cdot 180^\circ}{2 \cdot \pi} = 90^\circ$;

$\frac{5\pi}{36} = \frac{5\pi \cdot 180^\circ}{36 \cdot \pi} = 25^\circ$ **Ответ:** 60°; 90°; 25°.

б) $\frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi \cdot 180^\circ}{5 \cdot \pi} = 72^\circ$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi \cdot 180^\circ}{4 \cdot \pi} = 135^\circ$; $-\frac{\pi}{9} = -\frac{\pi \cdot 180^\circ}{9 \cdot \pi} = -20^\circ$

Ответ: 72°; 135°; –20°.

в) $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi \cdot 180^\circ}{6 \cdot \pi} = 30^\circ$; $\frac{3\pi}{5} = \frac{3\pi \cdot 180^\circ}{5 \cdot \pi} = 108^\circ$; $\pi = \frac{\pi \cdot 180^\circ}{\pi} = 180^\circ$

Ответ: 30°; 108°; 180°.

г) $\frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi \cdot 180^\circ}{4 \cdot \pi} = 225^\circ$; $\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi \cdot 180^\circ}{2 \cdot \pi} = 270^\circ$; $-\frac{7\pi}{12} = -\frac{7\pi \cdot 180^\circ}{12 \cdot \pi} = -105^\circ$

Ответ: 225°; 270°; –105°.

3. а) $\sin 0 + \cos\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 0 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

б) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\pi + \mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} - 2 + 3 = 2,5$

в) $6\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos 0 + \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3} = 3 - 2 + 3 = 4$

г) $3\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 3$ **Ответ: а)** 0,5; **б)** 2,5; **в)** 4; **г)** 3.

4. Существуют ли α, β, γ:

а) $\sin\alpha = -0,5$, $\cos\beta = \sqrt{3}$, $\mathrm{tg}\gamma = -2,5$

$|\cos\beta| \le 1$, а $\sqrt{3} > 1 \Rightarrow \cos\beta \ne \sqrt{3}$ **Ответ:** не существует β

б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cos\beta = -2,2$, $\mathrm{tg}\gamma = 0,3$; $|\sin\alpha| \le 1$, $|\cos\beta| \le 1$, $a\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$;

$-2,2 < -1$ **Ответ:** не существуют α, β

в) $\sin\alpha = 1{,}3,\ \cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{4},\ \mathrm{tg}\gamma = 5{,}2,\ |\sin\alpha| \le 1,\ |\cos\beta| \le 1$, но $1{,}3 > 1$

Ответ: α не существует

г) $\sin\alpha = -\frac{7}{9},\quad \cos\beta = \sqrt{2{,}5},\quad \mathrm{tg}\gamma = -7{,}5,\quad |\cos\beta| \le 1,$ но $\sqrt{2{,}5} > 1$

Ответ: β не существует

5. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

а) $\cos\alpha = -\frac{7}{25};\ \sin\alpha = \frac{24}{25}$ – ? $\left(-\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = 1$ **Ответ:** могут

б) $\cos\alpha = 0{,}4;\ \sin\alpha = 0{,}7$ $(0{,}4)^2 + (0{,}7)^2 = 0{,}65 \ne 1$ **Ответ:** не могут

в) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3};\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{11}{9} \ne 1$

Ответ: не могут

г) $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}};\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ **Ответ:** могут

6. $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$

а) $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{3}{5};\ \mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{5}{3}$ $-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) = 1$ **Ответ:** могут

б) $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3} - 2;\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \sqrt{3} + 2$ $\left(\sqrt{3} - 2\right)\cdot\left(\sqrt{3} + 2\right) = -1 \ne 1$

Ответ: не могут

в) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2{,}4;\ \mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{5}{12}$ $2{,}4\cdot\left(-\frac{5}{12}\right) = -1 \ne 1$ **Ответ:** не могут

г) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2};\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = 1$ **Ответ:** могут

7. а) $\sin\alpha = -0{,}8;\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ – III четв. $\cos\alpha,\quad \mathrm{tg}\,\alpha,\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = ?$

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - (0{,}8)^2} = -0{,}6;\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}8}{-0{,}6} = 1\frac{1}{3}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{3}{4}$ **Ответ:** $-0{,}6;\ 1\frac{1}{3};\ \frac{3}{4}$

б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ – II четв. $\sin\alpha,\quad \mathrm{tg}\,\alpha,\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = ?$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{-\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4};\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{10}\cdot 4}{4\cdot\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{15}}{3}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{3}{\sqrt{15}}$ **Ответ:** $\frac{\sqrt{10}}{4};\ -\frac{\sqrt{15}}{3};\ -\frac{3}{\sqrt{15}}$

в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3},\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ – I четв. $\cos\alpha,\quad \mathrm{tg}\,\alpha,\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = ?$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{3};\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\cdot 3}{3\cdot\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ **Ответ:** $\frac{\sqrt{7}}{3};\ \frac{\sqrt{14}}{7};\ \frac{\sqrt{14}}{2}$

г) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$ $\quad \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ – IV четв. $\quad \sin\alpha,\quad \operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}\alpha=?$

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=-\frac{8}{17}\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{8\cdot17}{17\cdot15}=-\frac{8}{15}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{15}{8}=-1\frac{7}{8}$$

Ответ: $-\frac{8}{17}$; $-\frac{8}{15}$; $-1\frac{7}{8}$

8. а) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=\cos^2\alpha+\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\cdot\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)=$
$=\cos^2+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

б) $\frac{1-2\cos^2\beta}{\cos\beta+\sin\beta}=\frac{\cos^2\beta+\sin^2\beta-2\cos^2\beta}{\cos\beta+\sin\beta}=$
$=\frac{(\cos\beta+\sin\beta)(\sin\beta-\cos\beta)}{\cos\beta+\sin\beta}=\sin\beta-\cos\beta$

в) $\left(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$
$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

г) $\frac{\sin^2 t-1}{\cos^4 t}+\operatorname{tg}^2 t=\frac{-\cos^2 t}{\cos^4 t}+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{-1+\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{-\cos^2 t}{\cos^2 t}=-1$

9.а) $\frac{\cos\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{4\pi}{15}-\sin\frac{4\pi}{15}\cdot\sin\frac{\pi}{15}}{\cos0,3\pi\cdot\sin0,2\pi+\sin0,3\pi\cdot\cos0,2\pi}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{15}+\frac{4\pi}{15}\right)}{\sin(0,3\pi+0,2\pi)}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

б) $\frac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}=\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ **Ответ:** 1.

в) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{20}}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3\pi}{20}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ **Ответ:** 1.

г) $\frac{\sin\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18}}{\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}}=\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{9}\right)}{-\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{-\cos\pi}=\frac{1}{2}$

10. $\sin 2\alpha$, $\cos2\beta$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ = ?

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$; $\cos\beta=-\frac{5}{13}$; $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

$$\cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta=\left(-\frac{5}{13}\right)^2-\left(\frac{12}{13}\right)^2=-\frac{119}{169}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{12}{13}=\frac{16}{65}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{33}{65}$$

Ответ: $-\frac{24}{25}$; $-\frac{119}{169}$; $\frac{16}{65}$; $-\frac{33}{65}$

б) $\cos\alpha=0,6;\ \sin\beta=-\frac{8}{17};\ \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi,\ \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}.$

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-0,6^2}=-0,8;\qquad \cos\beta=-\sqrt{1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2}=-\frac{15}{17};$$

$$\sin 2\alpha=2\cdot(-0,8)\cdot 0,6=-0,96;\ \cos 2\beta=\left(-\frac{15}{17}\right)^2-\left(-\frac{8}{17}\right)^2=-\frac{161}{289};$$

$$\sin(\alpha-\beta)=-0,8\cdot\left(-\frac{15}{17}\right)-0,6\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)=\frac{84}{85};$$

$$\cos(\alpha+\beta)=0,6\cdot\left(-\frac{15}{17}\right)-(-0,8)\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)=-\frac{77}{85}$$

Ответ: –0,96; $\frac{161}{289}$; $\frac{84}{85}$; $-\frac{77}{85}$

11.а) $\frac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}=\frac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-2\sin\alpha\sin\beta}=$

$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ **Ответ:** $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$

б) $\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\frac{1-\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}=$

$=\frac{2\cos^2\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha(2\cos\alpha-1)}=\frac{\cos\alpha(2\cos\alpha-1)}{\sin\alpha(2\cos\alpha-1)}=\mathrm{ctg}\,\alpha$ **Ответ:** $\mathrm{ctg}\,\alpha$

в) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\sin\alpha}=$

$$=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha$$

Ответ: $\mathrm{tg}\,\alpha$

г) $\text{ctg}^2\alpha\cdot(1-\cos 2\alpha)+\cos^2\alpha=\text{ctg}^2\alpha\cdot\left(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)+\cos^2\alpha=$

$=\dfrac{\cos^2\alpha\cdot 2\cdot\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\cos^2\alpha=3\cos^2\alpha$ **Ответ:** $3\cos^2\alpha$

12. а) $\sin\dfrac{7\pi}{8}=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{8}\right)=\sin\dfrac{\pi}{8}$; $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}$

$\text{tg}\,0{,}6\pi=\text{tg}(0{,}5\pi+0{,}1\pi)=-\text{ctg}\,0{,}1\pi$;

$\text{ctg}(-1{,}2\pi)=-\text{ctg}(\pi+0{,}2\pi)=-\text{ctg}\,0{,}2\pi$

б) $\text{tg}\dfrac{6\pi}{5}=\text{tg}\left(\pi+\dfrac{\pi}{5}\right)=\text{tg}\dfrac{\pi}{5}$; $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{9}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{18}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{18}$

$\cos 1{,}8\pi=\cos(2\pi-0{,}2\pi)=\cos 0{,}2\pi$;

$\text{ctg}\,0{,}9\pi=\text{ctg}(\pi-0{,}1\pi)=-\text{ctg}\,0{,}1\pi$

Ответ: а) $\sin\dfrac{\pi}{8}$; $\sin\dfrac{\pi}{6}$; $-\text{ctg}\,0{,}1\pi$; $-\text{ctg}\,0{,}2\pi$

б) $\text{tg}\dfrac{\pi}{5}$; $-\cos\dfrac{\pi}{18}$; $\cos 0{,}2\pi$; $-\text{ctg}\,0{,}1\pi$

13.а) $8\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}\cdot\text{tg}\dfrac{4\pi}{3}\cdot\text{ctg}\dfrac{7\pi}{4}=8\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\cos\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\text{tg}\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(-\text{ctg}\dfrac{\pi}{4}\right)=$

$=4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{3}\cdot(-1)=2\sqrt{3}$

б) $\cos^2(\pi-\alpha)\cdot\text{tg}(\pi+\alpha)\cdot\text{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(2\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=$

$=\cos^2\alpha\cdot\text{tg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\,\alpha+\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

в) $10\,\text{ctg}\dfrac{3\pi}{4}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{7\pi}{4}=10\left(-\text{ctg}\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(-\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}=$

$=10\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5$

г) $\dfrac{\sin^2(\pi-t)}{1+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+t\right)}-\cos(2\pi-t)=\dfrac{\sin^2 t}{1-\cos t}-\cos t=$

$=\dfrac{\sin^2 t-\cos t+\cos^2 t}{1-\cos t}=\dfrac{1-\cos t}{1-\cos t}=1$ **Ответ: а)** $2\sqrt{3}$; **б)** 1; **в)** 5; **г)** 1

14. а) $\sin\dfrac{7\pi}{12}-\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ верно?

$\sin\dfrac{7\pi}{12}-\sin\dfrac{\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)-\sin\dfrac{\pi}{12}=\cos\dfrac{\pi}{12}-\sin\dfrac{\pi}{12}\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: неверно

б) $\cos\dfrac{11\pi}{24}-\cos\dfrac{\pi}{8}=-\sin\dfrac{7\pi}{24}$ верно?

$\cos\dfrac{11\pi}{24}-\cos\dfrac{\pi}{8}=-2\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{7\pi}{24}=-\sin\dfrac{7\pi}{24}$ **Ответ:** верно

в) $\sin\frac{11\pi}{18}+\sin\frac{7\pi}{18}=\cos\frac{2\pi}{9}$ верно?

$\sin\frac{11\pi}{18}+\sin\frac{7\pi}{18}=\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{18}\right)+\sin\frac{7\pi}{18}=\sin\frac{7\pi}{18}+\sin\frac{7\pi}{18}=2\sin\frac{7\pi}{18}=$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{18}\right)=2\cos\frac{2\pi}{18}=2\cos\frac{\pi}{9}\neq\cos\frac{2\pi}{9}$ **Ответ:** нет

г) $\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ верно?

$\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}=2\cos\frac{3\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ **Ответ:** верно.

15. $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$

а) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ – 3 четв. $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$ – 2 четв., $\sin\frac{\alpha}{2}>0$

$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\frac{\sqrt{26}}{26}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$

$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=-\frac{5\sqrt{26}\cdot 26}{26\cdot\sqrt{26}}=-5$ **Ответ:** $\frac{5\sqrt{26}}{26}$; $-\frac{\sqrt{26}}{26}$; -5

б) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ – 1 четв., $\cos\frac{\alpha}{2}>0$

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{3\sqrt{10}\cdot 10}{10\cdot\sqrt{10}}=3$ **Ответ:** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\frac{\sqrt{10}}{10}$; 3

в) $\cos\alpha=\frac{24}{25}$ $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\Rightarrow\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$, $\sin\frac{\alpha}{2}>0$; $\cos\frac{\alpha}{2}<0$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$ $\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=-\frac{\sqrt{2}\cdot 10}{10\cdot 7\sqrt{2}}=-\frac{1}{7}$ **Ответ:** $\frac{\sqrt{2}}{10}$; $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$; $-\frac{1}{7}$

г) $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$ $\sin\frac{\alpha}{2}>0$; $\cos\frac{\alpha}{2}<0$

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{15}{17}$ $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$ $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{4\sqrt{17}\cdot 17}{-17\cdot\sqrt{17}}=-4$

Ответ: $\frac{4\sqrt{17}}{17}$; $-\frac{\sqrt{17}}{17}$; –4.

16. а) $\alpha = 0{,}19$ $\sin\alpha \approx 0{,}0033$ $\cos\alpha \approx 0{,}9999$

$\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}0032$ $\operatorname{ctg}\alpha \approx 312{,}5$

б) $\alpha = 1{,}37$ $\sin\alpha \approx 0{,}0239$ $\cos\alpha \approx 0{,}9997$

$\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}0239$ $\operatorname{ctg}\alpha \approx 41{,}841$

в) $\alpha = 0{,}9$ $\sin\alpha \approx 0{,}0157$ $\cos\alpha \approx 0{,}9998$

$\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}0157$ $\operatorname{ctg}\alpha \approx 63{,}694$

г) $\alpha = 1{,}2$ $\sin\alpha \approx 0{,}0209$ $\cos\alpha \approx 0{,}9997$

$\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}0209$ $\operatorname{ctg}\alpha \approx 47{,}847$

Ответ: а)0,0033; 0,9999; 0,0032; 312,5

б) 0,0239; 0,9997; 0,0239; 41,841

в) 0,0157; 0,9998; 0,0157; 63,694 **г)**0,0209; 0,9997; 0,0209; 47,847

17. а)17°≈0,296рад≈0,3рад 43°24’≈43,3°≈0,7571рад≈0,76рад

83°36’≈83,6°≈1,46рад 72°12’≈72,2°≈1,26рад

б) 0,384рад≈22° 0,48рад≈27°30’ 1,11рад≈63°36’ 1,48рад≈84°48’

Ответ: а) 0,3; 0,76; 1,46; 1,26 рад **б)** 22°; 27°30’; 63°36’; 84°48’

18. а) l=α·R=2·1=2 см **б)** l=3π/4·6=4,5π см **в)** l=0,1·1=0,1 м

г) l=9/10·10=9π м **Ответ:** 2 см; 4,5π см; 0,1 м; 9π м

19. $S = \dfrac{\alpha \cdot R^2}{2}$ **а)** $S = \dfrac{2 \cdot 1^2}{2} = 1$ дм^2 **б)** $S = \dfrac{3\pi \cdot 4}{4 \cdot 2} = \dfrac{3\pi}{2}$ см^2

в) $S = \dfrac{0{,}1 \cdot 1}{2} = 0{,}05$ м^2 **г)** $S = \dfrac{5\pi \cdot 9}{3 \cdot 2} = 7{,}5\pi$ м^2

Ответ: 1 дм^2; $\dfrac{3\pi}{2}$ см^2; 0,05 м^2; 7,5π м^2

20. а) $\alpha = l{:}R \quad l = 2R$ **б)** $3l = 2R + l \Rightarrow l = R$

$\alpha = 2R{:}R = 2$ рад $\alpha = l{:}R = R{:}R = 1$ рад

21. а) $3\sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\cos(3\alpha - \pi) =$ $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$= 3\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - \pi\right) =$

$= 3\sin\dfrac{\pi}{4} + 2\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

б) $\sin^2\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right) + 3\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3}\right) + 3\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{6\pi}{4}\right) =$

$= \sin^2\dfrac{\pi}{3} + 3\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3\left(-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{4} - 3 \cdot 1 = -2\dfrac{1}{4}$ $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

в) $4\cos\left(3\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{12}\right) = 4\cos\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 = 3$

г) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}^2\left(2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$; $-2\dfrac{1}{4}$; 3; $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

22. а) $\cos\alpha = \frac{12}{13}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \qquad \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{5}{13}$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{5}{12}; \ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = -\frac{12}{5}$$

$$\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{ctg}\alpha} = \frac{1+\left(-\frac{5}{12}\right)}{1+\left(-\frac{12}{5}\right)} = -\frac{7\cdot 5}{12\cdot 7} = -\frac{5}{12}$$

б) $tg\alpha = \frac{5}{4} \qquad \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha(tg\alpha+1)}{\cos\alpha(tg\alpha-1)} = \frac{\frac{5}{4}+1}{\frac{5}{4}-1} = \frac{9\cdot 4}{4\cdot 1} = 9$

в) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \qquad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \qquad \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\frac{\cos\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha} = \frac{\cos\alpha\cdot(\sin\alpha+1)\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \sin\alpha+1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}+1 = \frac{3-2\sqrt{2}}{3}$$

г) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = 0{,}5$

$$\sin^2\alpha - \cos^2\beta = 1-\cos^2\alpha-\left(1-\sin^2\beta\right) = \sin^2\beta-\cos^2\alpha = -0{,}5$$

Ответ: $-\frac{5}{12}$; 9; $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$; $-0{,}5$

23. а) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\sin\alpha\cdot\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^{-1}\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \sin\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$$

$$\frac{1}{\cos\alpha}\left(\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}\right)^{-1} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}}\right)^{-1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$$

б) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = = \sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} - \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} =$

$$= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\mathrm{ctg}\alpha$$

в) $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \mathrm{ctg}\alpha$

г) $\sqrt{\sin^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha} = \sqrt{\sin^2\alpha\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)} =$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha\cdot\left(1+\mathrm{ctg}^2\alpha\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}}$$

24. Доказать **а)** $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

б) $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha+\beta)} + \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha-\beta)} =$

$= \dfrac{(tg\alpha + tg\beta)(1 - tg\alpha \cdot tg\beta)}{tg\alpha + tg\beta} + \dfrac{(tg\alpha - tg\beta)(1 + tg\alpha \cdot tg\beta)}{tg\alpha - tg\beta} =$

$= 1 - tg\alpha \cdot tg\beta + 1 + tg\alpha \cdot tg\beta = 2$

в) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = ctg\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) = ctg\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$

г) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} = \dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} =$

$= \dfrac{\cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot (ctg\beta + tg\alpha)}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} = tg\alpha + ctg\beta$

25.а) $\left(\sin^2 t + 2\sin t \cos t - \cos^2 t\right)^2 =$

$= (\sin 2t - \cos 2t)^2 = 1 - 2\sin 2t \cos 2t = 1 - \sin 4t$

б) $\dfrac{\cos\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin\alpha} = -\dfrac{2\sin 3\alpha \sin(-2\alpha) - 2\sin 3\alpha}{2\sin 2\alpha \cos 3\alpha - 2\cos 3\alpha} =$

$= \dfrac{2\sin 3\alpha(\sin 2\alpha - 1)}{2\cos 3\alpha(\sin 2\alpha - 1)} = \mathrm{tg}\, 3\alpha$

в) $\dfrac{1 - 4\sin^2 t \cdot \cos^2 t}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \dfrac{1 - \sin^2 2t}{\cos 2t} = \dfrac{\cos^2 2t}{\cos 2t} = \cos 2t$

г) $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \dfrac{2\sin 2\alpha \cos\alpha + 2\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha \cos\alpha + 2\cos 2\alpha} =$

$= \dfrac{2\sin 2\alpha(\cos\alpha + 1)}{2\cos 2\alpha(\cos\alpha + 1)} = tg 2\alpha$

26. а) $\dfrac{1 - tg^2 \frac{t}{2}}{1 + tg^2 \frac{t}{2}} = \dfrac{1 - tg^2 \frac{t}{2}}{\dfrac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}}} = \cos^2 \dfrac{t}{2}\left(1 - tg^2 \dfrac{t}{2}\right) = \cos^2 \dfrac{t}{2} - \sin^2 \dfrac{t}{2} = \cos t$

б) $\dfrac{2tg\frac{\beta}{2}}{1 + tg^2 \frac{\beta}{2}} = 2tg\dfrac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \dfrac{\beta}{2} = 2\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\beta}{2} = \sin\beta$

27. а) $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{4}$

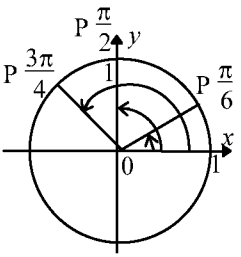
б) $\left(\sin\dfrac{7\pi}{18} - \sin\dfrac{\pi}{18}\right) : \cos\dfrac{2\pi}{9} = 2\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{2\pi}{9} : \cos\dfrac{2\pi}{9} = 1$

в) $\left(\sin^2\dfrac{\pi}{8} - \cos^2\dfrac{\pi}{8}\right)^2 = \left(\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8}\right)^2 = \cos^2\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$

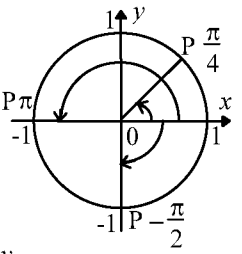
г) $\dfrac{\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}}=-\dfrac{2\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{5\pi}{12}}=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2\cdot 1=-2$

Ответ: $\frac{1}{4}$; 1; $\frac{1}{2}$; –2

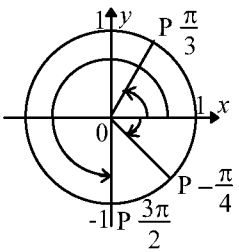
§ 1 п. 2 28. а)



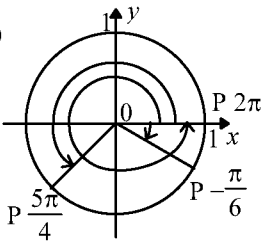
б)



в)



г)



29. а) $(0;1)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $(-1;0)$ **б)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0;-1)$

в) $(0;-1)$; $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(-1;0)$ **г)** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0;1)$

30. а) I четверть; III четверть; III четверть

б) IV четверть; IV четверть; II четверть

в) IV четверть; IV четверть; II четверть

г) II четверть; IV четверть; III четверть

31. а) $\sin\frac{3\pi}{7}>0,\ \cos\frac{9\pi}{8}<0,\ tg2,3\pi>0\Rightarrow \sin\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{9\pi}{8}\cdot tg2,3\pi<0$

б) $\sin 1>0,\ \cos 3<0,\ ctg5<0\Rightarrow \sin 1\cdot\cos 3\cdot ctg5>0$

в) $\sin 1,3\pi<0,\ \cos\frac{7\pi}{9}<0,\ tg2,9<0\Rightarrow \sin 1,3\pi\cdot\cos\frac{7\pi}{9}\cdot tg2,9<0$

г) $\sin 8>0,\ \cos 0,7>0,\ tg6,4>0\Rightarrow \sin 8\cdot\cos 0,7\cdot tg6,4>0$

Ответ: б); г) – положительные; **а); в)** – отрицательные знаки.

32. а) $\sin 4\pi=0,\ \cos 4\pi=1;\ \sin(-\pi)=0,\ \cos(-\pi)=-1$

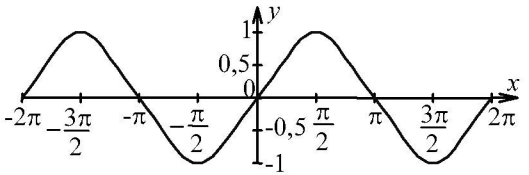
б) $\sin\frac{5\pi}{2}=1,\ \cos\frac{5\pi}{2}=0;\ \sin(-5,5\pi)=1,\ \cos(-5,5\pi)=0$

в) $\sin\pi=0,\ \cos\pi=-1;\ \sin(-2\pi)=0,\ \cos(-2\pi)=1$

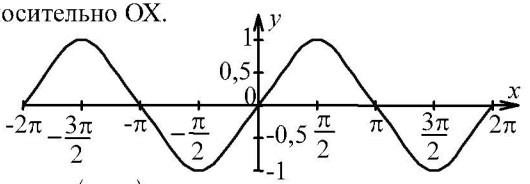
г) $\sin\frac{9\pi}{2}=1,\ \cos\frac{9\pi}{2}=0;\ \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1,\ \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=0$

Ответ: а) 0 и 1; 0 и –1. **б)** 1 и 0; 1 и 0. **в)** 0 и –1; 0 и 1. **г)** 1 и 0; 1 и 0.

33. а) $y=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ сдвиг по ОХ $y=\cos x$ на $\frac{3\pi}{2}$ влево.

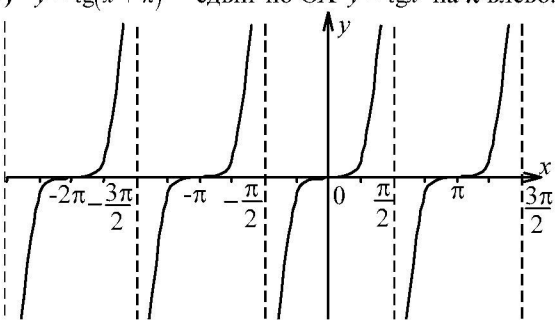


б) $y=-\sin(x+\pi)$ – сдвиг по ОХ $y=\sin x$ на π влево и симметрично относительно ОХ.

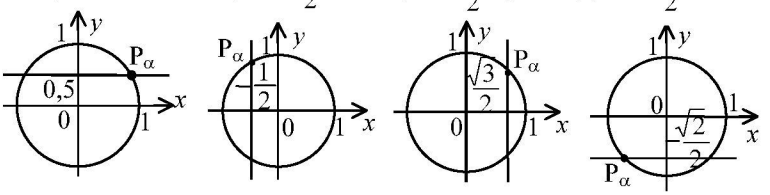


в) $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ – сдвиг по ОХ $y=\cos x$ на $\frac{\pi}{2}$ вправо.

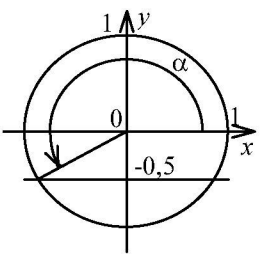
г) $y=\mathrm{tg}(x+\pi)$ – сдвиг по ОХ $y=\mathrm{tg}x$ на π влево.

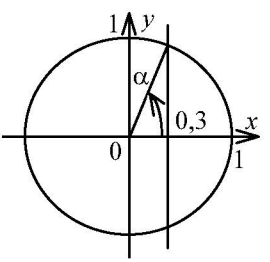


34. а) $y=0,5,\ x>0$ **б)** $x=-\frac{1}{2},\ y>0$ **в)** $x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ y>0$ **г)** $y=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x<0$

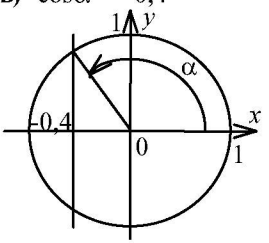


35. а) $\sin\alpha=-0,5$ **б)** $\cos\alpha=0,3$

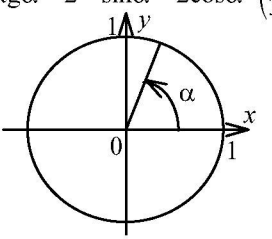




в) $\cos\alpha = -0{,}4$

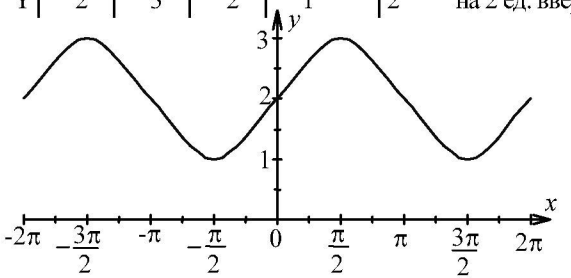


г) $\mathrm{tg}\alpha = 2 \quad \sin\alpha = 2\cos\alpha \quad \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$



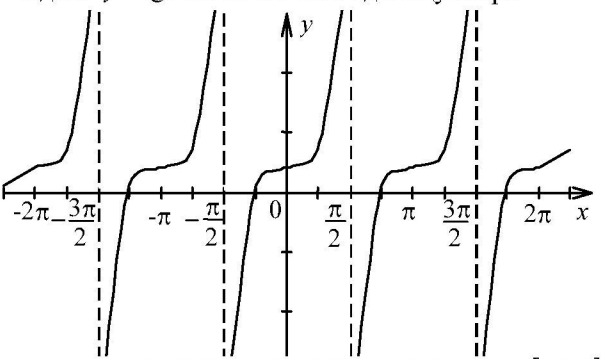
36. а) $y = 2 + \sin x$ О.О.Ф.: X – Л.Ч. О.З.Ф.: $y \in [1; 3]$

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	Сдвиг $y = \sin x$
Y	2	3	2	1	2	на 2 ед. вверх



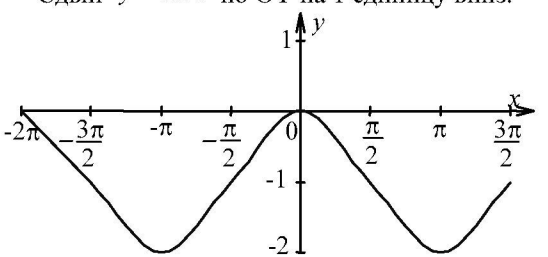
б) $y = 1 + \mathrm{tg}x$ О.О.Ф.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ О.З.Ф.: $y \in (-\infty, +\infty)$

Сдвиг $y = \mathrm{tg}x$ на по OY на 1 единицу вверх.



в) $y = \cos x - 1$ О.О.Ф.: X – Л.Ч. О.З.Ф.: $y \in [-2; 0]$

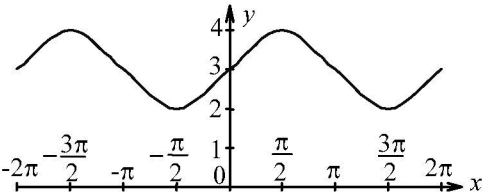
Сдвиг $y = \cos x$ по OY на 1 единицу вниз.



г) $y = 3 + \sin x$

О.О.Ф.: X – Л.Ч.

О.З.Ф.: $y \in [2; 4]$

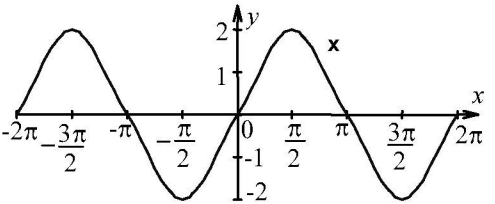


Сдвиг $y = \sin x$ на 3 единицы вверх по OY.

37. а) $y = 2\sin x$

О.О.Ф.: X – Л.Ч.

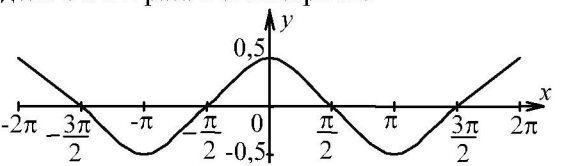
О.З.Ф.: $y \in [-2; 2]$



Расширение $y = \sin x$ вдоль оси OY в 2 раза.

б) $y = -\frac{1}{2}\cos x$ О.О.Ф.: X – Л.Ч. О.З.Ф.: $y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

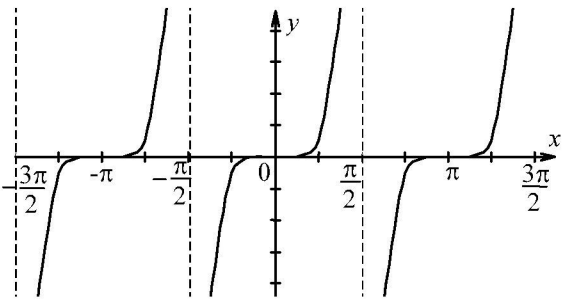
Сжатие $y = \cos x$ вдоль OY в 2 раза и симметрично относительно OX.



в) $y = 0,5\text{tg}x$ О.О.Ф.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z$ О.З.Ф.: $y \in (-\infty; +\infty)$

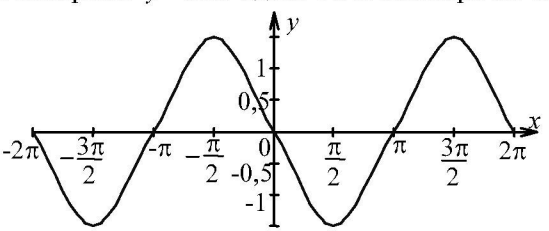
X	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$
Y	0,5	–0,5

Сжатие $y = \text{tg}x$ в 2 раза



г) $y = -1,5\sin x$ О.О.Ф.: X – Л.Ч. О.З.Ф.: $y \in [-1,5; 1,5]$

Расширение $y = \sin x$ вдоль OY и симметрично относительно OX



38. а) $y=\sin x$ с OX: $\begin{cases} y=\sin x & \sin x=0 \\ y=0 & x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z \end{cases}$

с OY: $\begin{cases} y=\sin x & y=0 \\ x=0 \end{cases}$ **Ответ:** $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 0\right)$; (0; 0)

б) $y=1+\cos x$ с OY: $x=0$ $y=1+1=2$

с OX: $y=0$ $1+\cos x=0$ $\cos x=-1,$ $x=\pi+2k\pi, k\in Z$

Ответ: (π + 2kπ; 0); (0; 2);

в) $y=\cos x$ с OX: $y=0,$ $\cos x=0$ $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,$ $k\in Z$

с OY: $x=0,$ $y=\cos 0=1$ **Ответ:** $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 0\right)$; (0; 1).

г) $y=\sin x-1$ с OX: $y=0,$ $\sin x=1$ $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,$ $k\in Z$

с OY: $x=0,$ $y=-1$ **Ответ:** $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\ 0\right)$; (0; –1).

39. а) $y=x^2-3x$ с OX: $y=0$ $x^2-3x=0$ $x(x-3)=0$ $x_1=0,$ $x_2=3$

с OY: $x=0,$ $y=0$ **Ответ:** (0; 0); (3; 0).

б) $y=\sin x-1{,}5$ $y=0,$ $\sin x=1{,}5>1$ Решений нет.

$x=0,$ $y=-1{,}5$ **Ответ:** (0; –1,5).

в) $y=2{,}5+\cos x$ $y=0$ $\cos x=-2{,}5<-1$ Решений нет

$x=0,$ $y=3{,}5$ **Ответ:** (0; 3,5).

г) $y=\frac{1}{x}+1$ О.О.Ф.: $x\neq 0$ $y=0$ $\frac{1}{x}=-1$ $x=-1$ **Ответ:** (–1; 0).

§2 п.3

40. а) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; $f(-1)=-2$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{2}$; $f(10)=10\frac{1}{10}$

Ответ: –2; $2\frac{1}{2}$; $10\frac{1}{10}$

б) $f(x)=3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$; $f(0)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $f(\pi)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Ответ: 0; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

в) $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$; $f(0)=0$; $f(1)=2$; $f(2)=\sqrt{6}$ **Ответ:** 0; 2; $\sqrt{6}$

г) $f(x)=2-\sin 2x$; $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=3$; $f(0)=2$; $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=1{,}5$ **Ответ:** 3; 2; 1,5

41. а) $f(x)=x^2+2x$; $f(x_0)=x_0{}^2+2x_0$; $f(t+1)=t^2+4t+3$

б) $f(x)=\mathrm{tg}2x$; $f(a)=\mathrm{tg}2a$; $f(b-1)=\mathrm{tg}2(b-1)$

в) $f(x)=\frac{1}{x}+1$; $f(x_0)=\frac{1}{x_0}+1$; $f(a+2)=\frac{a+3}{a+2}$

г) $f(x)=2\cos\frac{x}{3}$; $f(z)=2\cos\frac{z}{3}$; $f(h+\pi)=2\cos\frac{h+\pi}{3}$

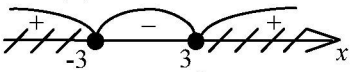
42. Ответ: а), г) – графики функций,

б), в) – не является графиком функции.

43. а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$; $D(f)$: $x^2-4x+3\neq 0$; $(x-3)(x-1)\neq 0$;

$x\neq 3,\ x\neq 1$ **Ответ:** $D(f):(-\infty;1)\cup(1;3)\cup(3;\infty)$

б) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$; $D(f)$: $x^2-9\geq 0$; $(x-3)(x+3)\geq 0$; $x\geq 3,\ x\leq -3$

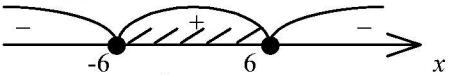


Ответ: $D(f):=(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$

в) $f(x)=\dfrac{5-x^2}{x^2+2x-8}$; $D(f)$: $x^2+2x-8\neq 0$; $(x+4)(x-2)\neq 0$;

$x\neq 2,\ x\neq -4$ **Ответ:** $D(f):(-\infty;-4)\cup(-4;2)\cup(2;\infty)$

г) $f(x)=\sqrt{36-x^2}$; $D(f)$: $36-x^2\geq 0$; $(6-x)(6+x)\geq 0$; $-6\leq x\leq 6$



Ответ: $D(f):=[-6;6]$

44. а) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ $x\neq 0$ **Ответ:** $D(f):(-\infty;0)\cup(0;\infty)$

б) $f(x)=2\mathrm{tg}x$ **Ответ:** $D(f):x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$

в) $f(x)=1+\mathrm{ctg}x$ **Ответ:** $D(f)$: $x\neq k\pi,\ k\in Z$

г) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ $x\neq 0$ **Ответ:** $D(f):(-\infty;0)\cup(0;\infty)$

45. а) $y=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ $D(y)=(-\infty;+\infty)$; $E(y)=[-2;2]$

б) $y=2+\dfrac{4}{x-3}$ $D(y):(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$; $E(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

в) $y=\dfrac{3}{x+1}-1$ $D(y):(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$; $E(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

г) $y=3+0,5\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $D(y)=(-\infty;+\infty)$; $E(y)=[2,5;3,5]$

46. Ответ: по рисунку 27

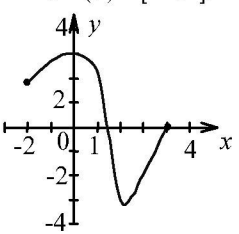
а) $D(f)=[-5;6]$; $E(f)=[-2;5]$

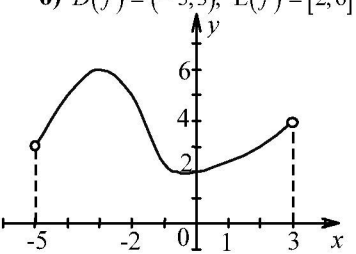
б) $D(f)=[-6;4]$; $E(f)=[-2;2]$

в) $D(f)=[-6;1,5)\cup(1,5;6]$; $E(f)=[-3;3)$

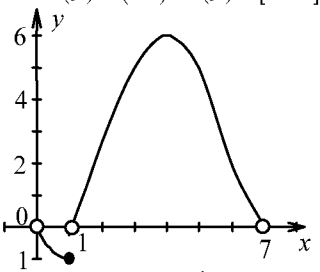
г) $D(f)=[-4;3]$; $E(f)=(-1;4]$

47. а) $D(f)=[-2,4]$, $E(f)=[-3,3]$ **б)** $D(f)=(-5;3)$, $E(f)=[2,6]$

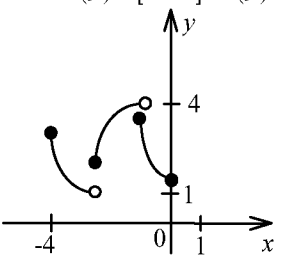




в) $D(f)=(0;7)$, $E(f)=[-1,6]$

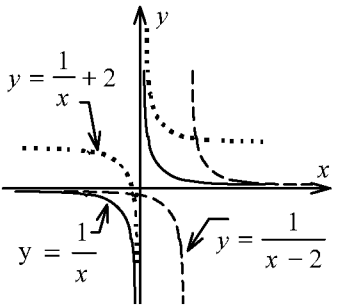


г) $D(f)=[-4,0]$, $E(f)=(1,4)$



48. а) $y=\frac{1}{x}$; $y=\frac{1}{x}+2$; $y=\frac{1}{x-2}$

x	1	-1	2	-2	3	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
y	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	-2



$y=\frac{1}{x}+2$ – сдвиг по OY на 2 единицы вверх.

$y=\frac{1}{x-2}$ – сдвиг по OX на 2 единицы вправо.

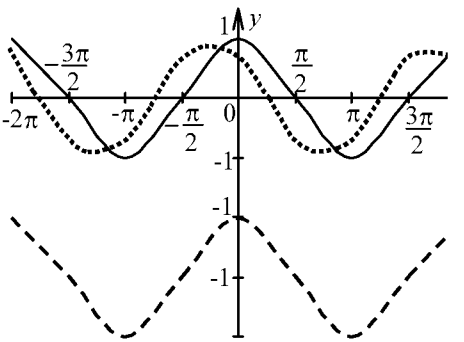
б) $y=\cos x$ $\quad y=\cos x-3$ – сдвиг по оси OY на 3 единицы вниз.

$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ – сдвиг по OX на $\frac{\pi}{4}$ единиц влево.

y_1 – $y=\cos x$;

y_2 – $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

y_3 – $y=\cos x-3$



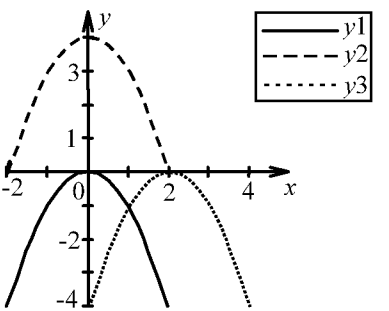
в) $y=-x^2$ $\quad y=4-x^2$ – сдвиг по OY на 4 единицы вверх

$y=-(x-2)^2$ – сдвиг по OX на 2 единицы вправо

y_1 – $y=-x^2$

y_2 – $y=4-x^2$

y_3 – $y=-(x-2)^2$

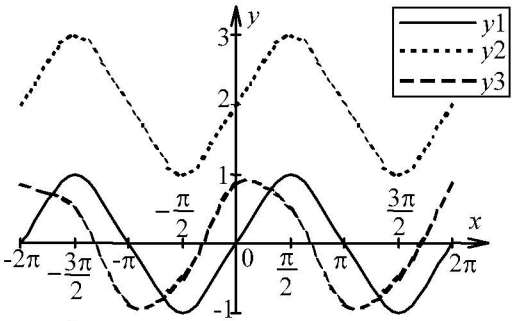


г) $y=\sin x$

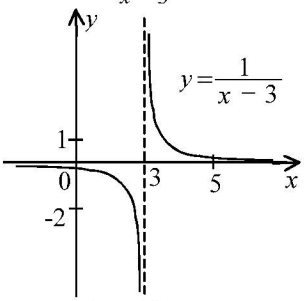
$y=\sin x+2$ – сдвиг по OY на 2 единицы вверх.

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ – сдвиг по OX на $\frac{\pi}{3}$ единиц влево.

$\mathbf{y_1}$ – $y = \sin x$;
$\mathbf{y_2}$ – $y = \sin x + 2$;
$\mathbf{y_3}$ – $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$



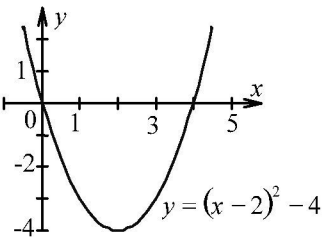
49. а) $y = \frac{1}{x-3}$ – сдвиг $y = \frac{1}{x}$ на 3 единицы вправо по оси OX.



X	4	2	5	1	$3\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
Y	1	–1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	–2

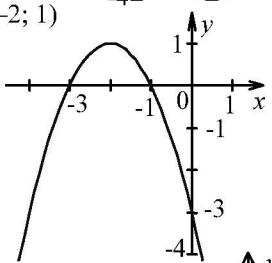
б) $y = (x-2)^2 - 4$ вершина: (2; – 4)

X	1	3	4	0
Y	– 3	– 3	0	0



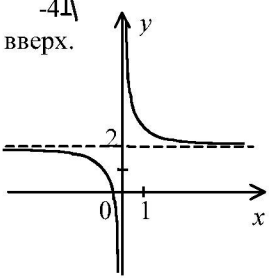
в) $y = 1 - (x+2)^2$ – вершина: (–2; 1)

X	– 3	– 1	0	– 4
Y	0	0	– 3	– 3

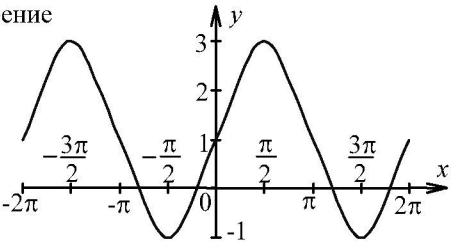


г) $y = 2 + \frac{1}{x}$ – сдвиг по OY на 2 единицы вверх.

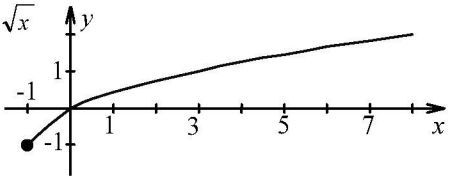
X	1	– 1	2	– 2	0,5	– 0,5
Y	3	1	2,5	1,5	4	0



50. а) $y = 1 + 2\sin x$ – расширение $y = \sin x$ вдоль OY в 2 раза и сдвиг по OY на 1 единицу вверх.

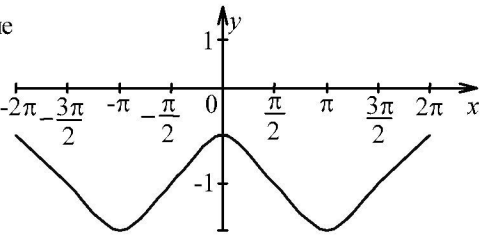


б) $y = \sqrt{x+1} - 1$ – сдвиг $y = \sqrt{x}$ по OX на 1 единицу влево и по OY на 1 единицу вниз.

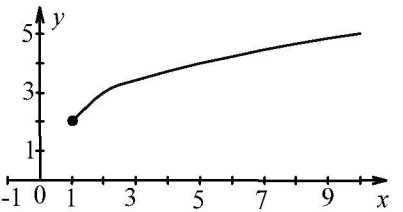


X	0	3	– 1
Y	0	1	– 1

в) $y = 0{,}5\cos x - 1$ – сжатие $y = \cos x$ вдоль OY и сдвиг по OY на 1 единицу вниз.



г) $y = 2 + \sqrt{x-1}$ – сдвиг $y = \sqrt{x}$ по OX на 1 единицу вправо и по OY на 2 единицы вверх.



X	1	2	5
Y	2	3	4

51.а) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$ $\quad f(-2)=2;\ f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3};\ f(0)=0;\ f(5)=5$

Ответ: 2; $\frac{1}{3}$; 0; 5.

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ если } x \ge -1 \\ 1 - x, \text{ если } x < -1 \end{cases}$ $\quad f(-2) = 3;\ f(-1) = 0;\ f(0) = -1;\ f(4) = 15$

Ответ: 3; 0; – 1; 15.

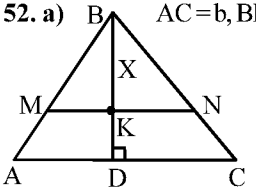
в) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x > 0 \\ \cos x - 1, \text{ если } x \le 0 \end{cases}$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1;\ f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2};\ f(0) = 0;\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ **Ответ:** – 1; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$

г) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \\ -1, \text{ если } x < 0 \end{cases}$

$f(-1{,}7) = -1;\ f\left(-\sqrt{2}\right) = -1;\ f(0) = 0;\ f(3{,}8) = 1$ **Ответ:** – 1; – 1; 0; 1.

52. а) $AC = b, BD = h, BK = X, MN \parallel AC$ $\quad S_{\Delta BMN} = \frac{1}{2} MN \cdot BK$



$$MN = \frac{b}{h} X \quad т.к. \ \Delta MBN \sim \Delta ABC$$

$$S_{\Delta BMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{h} \cdot X \cdot X = \frac{b}{2h} \cdot X^2$$

$$S_{AMNC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BMN} = \frac{1}{2} b \left(h - \frac{X^2}{h} \right)$$

Ответ: $\frac{b}{2h} \cdot X^2$; $\frac{1}{2} b \left(h - \frac{X^2}{h} \right)$

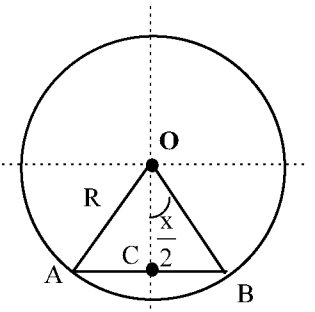
б) $S_{СЕГМ} = S_{СЕК} - S_{\Delta AOB}$

$$S_{СЕК} = \frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot x = \frac{R^2 x}{2}$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OC =$$

$$= R \sin\frac{x}{2} \cdot R \cos\frac{x}{2} =$$

$$= R^2 \frac{1}{2} \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = \frac{R^2}{2} \sin x$$

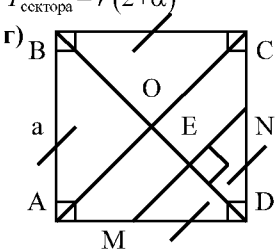


$$S_{СЕГМ} = \frac{R^2 x}{2} - \frac{R^2}{2} \cdot \sin x = \frac{R^2}{2} (x - \sin x)$$ **Ответ:** $S_{сегм} = \frac{R^2}{2} X$

в) **Ответ:** $P_{сектора} = r + r + \ell$, где ℓ – длина дуги $\ell = r \cdot \alpha$

$P_{сектора} = r(2+\alpha)$

г)



$AB = a$, ABCD – квадрат, $ED = X$, $B = a\sqrt{2}$

ΔMDE и ΔDEN – равнобедр. $\Rightarrow MN = 2X$

$$S_{\Delta MND} = \frac{1}{2} \cdot 2X \cdot X = X^2$$

$$S_{ост.} = S_{ABCD} - S_{\Delta MND} = a^2 - X^2$$

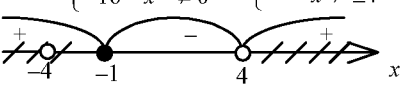
Ответ: $X^2; (a^2 - X^2)$.

53. а) $y = \frac{\sqrt{3x-2}}{x^2 - x - 2}$ $\quad D(f)$: $\begin{cases} 3x - 2 \ge 0 \\ x^2 - x - 2 \ne 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge \frac{2}{3} \\ x \ne 2; \ x \ne -1 \end{cases}$

Ответ: $D(f) = \left[\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

б) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{16 - x^2}$ $\quad D(f)$: $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \ge 0 \\ 16 - x^2 \ne 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-4)(x+1) \ge 0 \\ x \ne \pm 4 \end{cases}$

$x > 4, \ x \le -1$

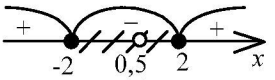


Ответ: $D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; \ -1] \cup (4; +\infty)$

в) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{3 - 2x}$ $\quad D(f)$: $\begin{cases} x + 2 \ge 0 \\ 3 - 2x \ne 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -2 \\ x \ne 1{,}5 \end{cases}$

Ответ: $D(f) = [-2; 1{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$

г) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-2x}$ $\quad D(f)$: $\begin{cases}4-x^2\ge 0\\ 1-2x\ne 0\end{cases}$ $\begin{cases}(x-2)(x+2)\le 0\\ x\ne 0{,}5\end{cases}$



Ответ: $D(f)=[-2;0{,}5)\cup(0{,}5;2]$

54. а) $y=1+\sin^2 x$ **Ответ:** $D(f)=(-\infty;+\infty)$; $E(f)=[1;2]$

б) $y=\dfrac{x-1}{x}$ **Ответ:** $D(f): x\ne 0; E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

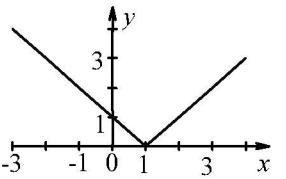
в) $y=\sqrt{x^2+4}$ **Ответ:** $D(f)=(-\infty;+\infty)$; $E(f)=[2;+\infty)$

г) $y=1{,}5-0{,}5\cos^2 x$ **Ответ:** $D(f)=(-\infty;+\infty)$; $E(f)=[1;1{,}5]$

55. а) $y=|x-1|$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$

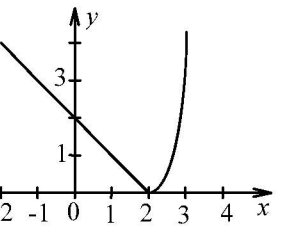
$E(f)=[0;+\infty)$



б) $y=\begin{cases}x^2-4, & \text{если } x\ge 2\\ 2-x, & \text{если } x<2\end{cases}$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$

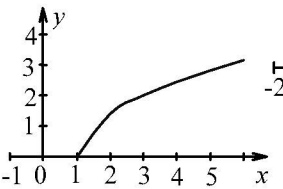
$E(f)=[0;+\infty)$



в) $y=\sqrt{2x-2}$

$D(f)=[1;+\infty)$

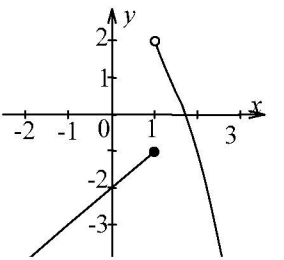
$E(f)=[0;+\infty)$



г) $y=\begin{cases}3-x^2, & \text{если } x>1\\ x-2, & \text{если } x\le 1\end{cases}$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$

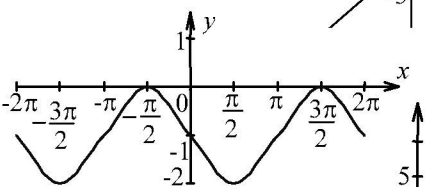
$E(f)=(-\infty;2)$



56. а) $y=\sin 3x-1$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$

$E(f)=[-2;0]$

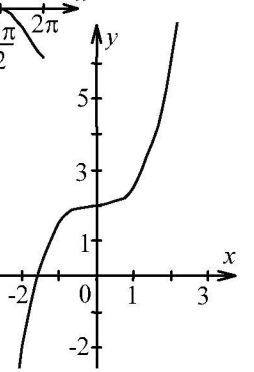


б) $y=\dfrac{1}{2}x^3+2$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$

$E(f)=(-\infty;+\infty)$

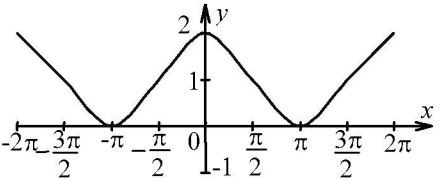
X	0	2	−2
Y	2	6	−2



в) $y = 1 + \cos 2x$

$D(f) = (-\infty; +\infty)$

$E(f) = [0; 2]$

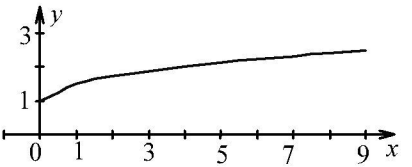


г) $y = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$

$D(f) = [0; +\infty)$

$E(f) = [1; +\infty)$

X	0	4	9
Y	1	2	2,5



§2 п.4

57. а) $f(-x) = 3\cdot(-x)^2 + (-x)^4 = 3x^2 + x^4 = f(x)$ – четная

б) $f(-x) = (-x)^5 \cdot \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = x^5 \cdot \sin\frac{x}{2} = f(x)$ – четная

в) $f(-x) = (-x)^2 \cdot \cos(-x) = x^2 \cdot \cos x = f(x)$ – четная

г) $f(-x) = 4(-x)^6 - (-x)^2 = 4x^6 - x^2 = f(x)$ – четная

58. а) $f(-x) = \frac{\cos(-5x)+1}{|-x|} = \frac{\cos 5x + 1}{|x|} = f(x)$ – четная

б) $f(-x) = \frac{\sin^2(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1} = f(x)$ – четная

в) $f(-x) = \frac{2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{(-x^3)} = \frac{-2\sin\frac{x}{2}}{-x^3} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{x^3} = f(x)$ – четная

г) $f(-x) = \frac{\cos(-x)^3}{4-(-x)^2} = \frac{\cos x^3}{4 - x^2} = f(x)$ – четная

59. а) $f(-x) = (-x)^3 \sin(-x)^2 = -x^3 \sin x^2 = -f(x)$ – нечетная

б) $f(-x) = (-x)^2\left(2(-x) - (-x)^3\right) = -x^2\left(2x - x^3\right) = -f(x)$ – нечетная

в) $f(-x) = (-x)^5 \cos(-3x) = -x^5 \cos 3x = -f(x)$ – нечетная

г) $f(-x) = (-x)\left(5 - (-x)^2\right) = -x\left(5 - x^2\right) = -f(x)$ – нечетная

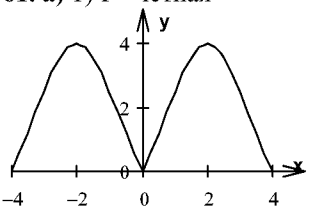
60. а) $f(-x) = \frac{(-x)^4 + 1}{2(-x)^3} = -\frac{x^4 + 1}{2x^3} = -f(x)$ – нечетная

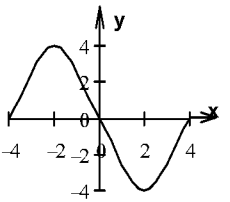
б) $f(-x) = \frac{\cos(-x)^3}{-x\left(25 - (-x)^2\right)} = -\frac{\cos x^3}{x\left(25 - x^2\right)} = -f(x)$ – нечетная

в) $f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^6 + 2} = -\frac{3x}{x^6 + 2} = -f(x)$ – нечетная

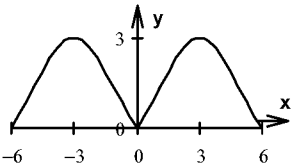
г) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2\sin(-x)}{(-x)^2-9}=-\dfrac{x^2\sin x}{x^2-9}=-f(x)$ – нечетная

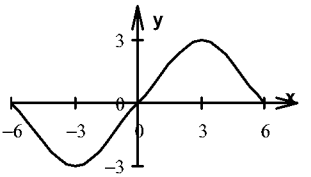
61. а) 1) f – четная 2) f – нечетная



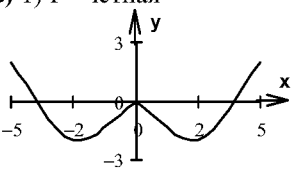


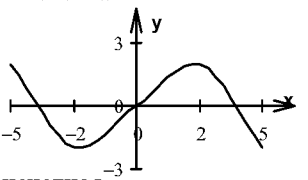
б) 1) f – четная 2) f – нечетная



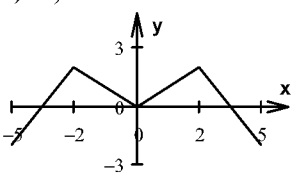


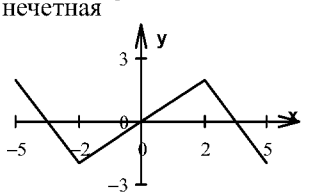
в) 1) f – четная 2) f – нечетная





г) 1) f – четная 2) f – нечетная





62.а) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$, $T=4\pi$ $f(x-4\pi)=-\sin\left(2\pi-\dfrac{x}{2}\right)=\sin\dfrac{x}{2}=f(x)$

$f(x+4\pi)=\sin\left(2\pi+\dfrac{x}{2}\right)=\sin\dfrac{x}{2}=f(x)\Rightarrow T=4\pi$ – *период*

б) $f(x)=2\mathrm{tg}3x$, $T=\dfrac{\pi}{3}$ $f\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\mathrm{tg}(\pi-3x)=2\mathrm{tg}3x=f(x)$

$f\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{tg}(3x+\pi)=2\mathrm{tg}3x=f(x)\Rightarrow T=\dfrac{\pi}{3}$ – *период*

в) $f(x)=3\cos 4x$, $T=\dfrac{\pi}{2}$ $f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=3\cos(2\pi-4x)=3\cos 4x=f(x)$

$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=3\cos(4x+2\pi)=3\cos 4x=f(x)\Rightarrow T=\dfrac{\pi}{2}$ – *период*

г) $f(x)=\mathrm{ctg}\dfrac{x}{3}$, $T=3\pi$ $f(x-3\pi)=-ctg(\pi-3x)=ctg3x=f(x)$

$f\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=ctg(3x+\pi)=ctg\dfrac{\pi}{3}=f(x)\Rightarrow$ T=3π –период

63. а) $f(x) = 2 - \cos x$ – периодическая?

$T = 2\pi$ – наименьший положительный период $y = \cos x$

$f(x + 2\pi) = 2 - \cos(x + 2\pi) = 2 - \cos x = f(x)$

$f(x - 2\pi) = 2 - \cos(x - 2\pi) = 2 - \cos x = f(x)$

Следовательно, $f(x)$ – периодическая с $T = 2\pi$

б) $f(x) = tg2x$ – периодическая?

$T = \pi$ – наименьший положительный период $y = tgx$

$f(x + \pi) = \text{tg}2(x + \pi) = \text{tg}(2\pi + 2x) = \text{tg}2x = f(x)$

$f(x - \pi) = tg2(x - \pi) = -tg(2\pi - 2x) = tg(2x) = f(x)$

Следовательно, $f(x)$ – периодическая.

в) $f(x) = \sin x + \cos x$

$T = 2\pi$ – наименьший положительный период $y = \sin x$ и $y = \cos x$

$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$

$f(x - 2\pi) = \sin(x - 2\pi) + \cos(x - 2\pi) =$

$= -\sin(2\pi - x) + \cos(2\pi - x) = \sin x + \cos x = f(x)$

Следовательно, $f(x)$ – периодическая.

г) $f(x) = 3 + \sin^2 x$

$T = 2\pi$ – наименьший положительный период $y = \sin x$.

$f(x + 2\pi) = 3 + \sin^2(x + 2\pi) = 3 + \sin^2 x = f(x)$

$f(x - 2\pi) = 3 + \sin^2(x - 2\pi) = 3 + \sin^2 x = f(x)$

Следовательно, $f(x)$ – периодическая.

64.а) $y = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{4} + 2\pi\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}(x + 8\pi) \Rightarrow T = 8\pi$ **Ответ:** 8π

б) $y = 3tg1{,}5x = 3tg(1{,}5x + \pi) = 3tg1{,}5\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) \Rightarrow T = \frac{2}{3}\pi$ **Ответ:** $\frac{2}{3}\pi$

в) $y = 4\cos 2x = 4\cos(2x + 2\pi) = 4\cos 2(x + \pi) \Rightarrow T = \pi$ **Ответ:** π

г) $y = 5tg\frac{x}{3} = 5tg\left(\frac{x}{3} + \pi\right) = 5tg\frac{1}{3}(x + 3\pi) \Rightarrow T = 3\pi$ **Ответ:** 3π

65. а) $y = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin(2x + 2\pi) = \frac{1}{2}\sin 2(x + \pi) \Rightarrow T = \pi$

Ответ: π

б) $y = \sin x \sin 4x - \cos x \cos 4x = -\cos 5x =$

$= -\cos(5x + 2\pi) = -\cos 5\left(x + \frac{2}{5}\pi\right) \Rightarrow T = \frac{2}{5}\pi$ **Ответ:** $\frac{2}{5}\pi$

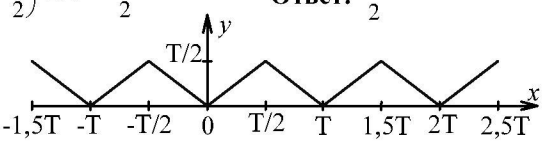
в) $y = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x = -\cos(2x + 2\pi) = -\cos 2(x + \pi) \Rightarrow T = \pi$

Ответ: π

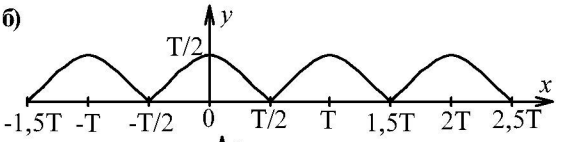
г) $y = \sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x = \sin 4x = \sin(4x + 2\pi) =$

$= \sin 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$ **Ответ:** $\frac{\pi}{2}$

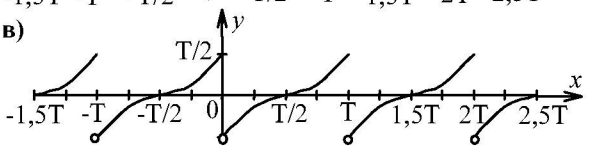
66. а)



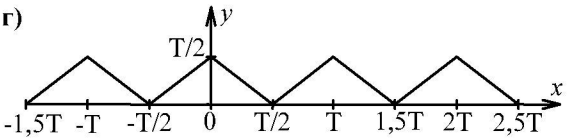
б)



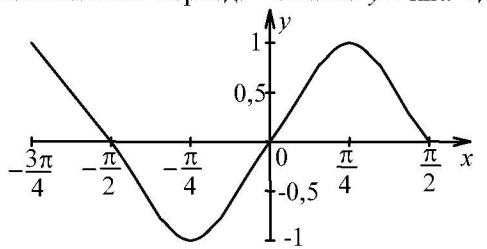
в)



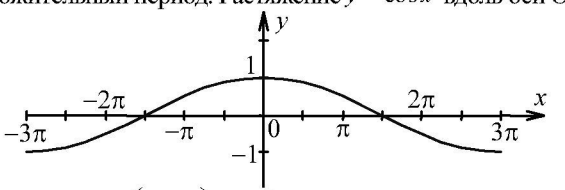
г)



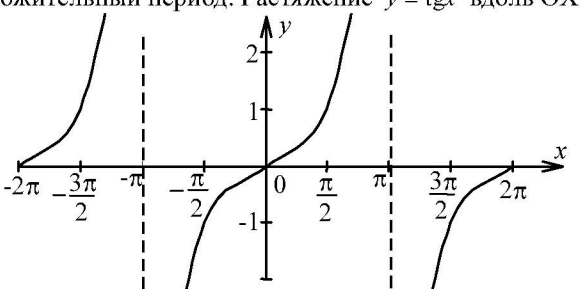
67. а) $y = \sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2(x + \pi) \Rightarrow T = \pi$ – наименьший положительный период. Сжатие $y = \sin x$ вдоль оси OX в 2 раза.



б) $y = \cos\frac{x}{3} = \cos\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = \cos\frac{1}{3}(x + 6\pi) \Rightarrow T = 6\pi$ – наименьший положительный период. Растяжение $y = \cos x$ вдоль оси OX в 3 раза.

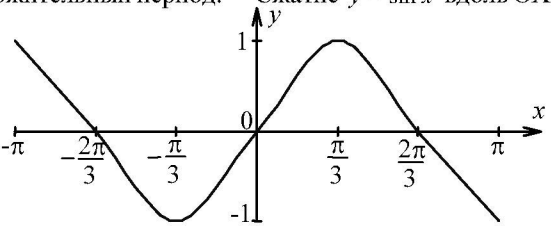


в) $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \mathrm{tg}\frac{1}{2}(x + 2\pi) \Rightarrow T = 2\pi$ – наименьший положительный период. Растяжение $y = \mathrm{tg}x$ вдоль OX в 2 раза.



г) $y = \sin 1{,}5x = \sin(1{,}5x + 2\pi) = \sin 1{,}5\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) \Rightarrow T = \frac{4}{3}\pi$ – наименьший

положительный период. Сжатие $y = \sin x$ вдоль OX в 1,5 раза.



68. а), б), в), г) не прав.

69. а) $y = \sin x + \mathrm{ctg}x - x$ – нечетная **б)** $y = \dfrac{|x|}{\sin x \cos x}$ – нечетная

в) $y = x^4 + \mathrm{tg}^2 x + x \sin x$ – четная **г)** $y = \dfrac{\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x}{|x|}$ – нечетная

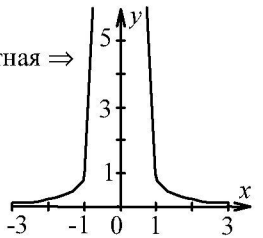
70. а) $y = \dfrac{\sin x}{x^3 - 1}$ – ни четная, ни нечетная

б) $y = \dfrac{x + \sin x}{x - \sin x}$ – четная **в)** $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}$ – ни четная, ни нечетная

г) $y = \dfrac{x + \mathrm{tg}x}{x \cos x}$ – четная

71. а) $y = \dfrac{1}{x^2}$; $y(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2} = y(x)$ – четная $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ график симметричен относительно OY.

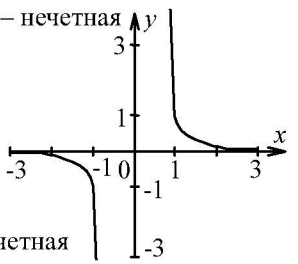


$D(y)$: $x \neq 0$

x	1	2	$\frac{1}{2}$
y	1	$\frac{1}{4}$	4

б) $y = \dfrac{1}{x^3}$ $y(-x) = \dfrac{1}{(-x)^3} = -\dfrac{1}{x^3} = -f(x)$ – нечетная

$\Rightarrow$ график симметричен относительно начала координат.



$D(y)$: $x \neq 0$

x	1	2	$\frac{1}{2}$
y	1	$\frac{1}{8}$	8

72. а) $h(x) = f(x) \cdot g^2(x)$; f – четная, g – нечетная

Ответ: h – четная

б) $h(x) = f(x) - g(x)$; f, g – четные **Ответ:** h – четная

в) $h(x) = f(x) + g(x)$; f, g – нечетные **Ответ:** h – нечетная

г) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$; f, g – нечетные **Ответ:** h – четная

73. а) $y = \sin^2 x = \dfrac{1}{2} 2\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2(x + \pi)) \Rightarrow T = \pi$

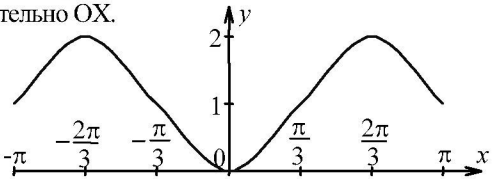
Ответ: $T = \pi$

б) $y = \mathrm{tg}x\,\mathrm{ctg}x = 1$ **Ответ:** T = 0

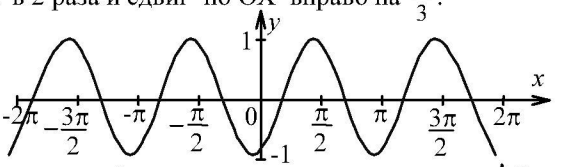
в) $y = \sin^4 x - \cos^4 x = -\cos 2x = -\cos 2(x + \pi) \Rightarrow T = \pi$ **Ответ:** $T = \pi$

г) $y = \left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x = 1 + \sin(x + 2\pi)$ **Ответ:** $T = 2\pi$

74. а) $y = 1 - \cos 1{,}5x$ $\quad T = \frac{4}{3}\pi$, сжатие $y = \cos x$ вдоль OX и симметрично относительно OX.

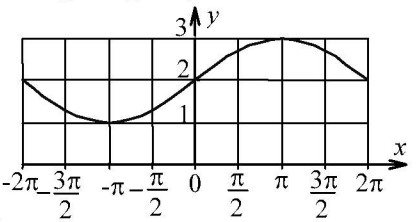


б) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$ $\quad T = \frac{5\pi}{6}$, сжатие $y = \sin x$ вдоль OX в 2 раза и сдвиг по OX вправо на $\frac{\pi}{3}$.



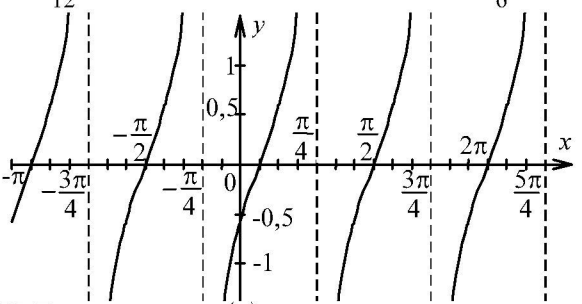
в) $y = 2 + \sin\frac{x}{2}$

$T = 4\pi$ растяжение вдоль OX в 2 раза и сдвиг по OY на 2 единицы вверх.



г) $y = tg\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = tg2\left(x + \frac{11\pi}{12}\right)$

$T = \frac{11\pi}{12}$, сжатие по OX в 2 раза и сдвиг на $\frac{\pi}{6}$ по OX вправо.



75. Доказать: если $f(x)$ – периодическая, то $y = kf(x) + b$ – периодическая.

Доказательство: Пусть T – период $f(x)$

$$y(x+T) = kf(x+T) + b = y = kf(x) + b = y(x)$$

$$y(x-T) = kf(x-T) + b = y = kf(x) + b = y(x)$$

Следовательно, $y = kf(x) + b$ – периодическая.

76. а) $y(x+2) = (x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 1 \neq x^2 - 3 \Rightarrow 2$ – не период

б) $y(x+2) = \cos(x+2) = \cos x \cos 2 - \sin x \sin 2 \neq \cos x \Rightarrow 2$ – не период

в) $y = 3x - 5$ $\quad y(x+2) = 3(x+2) - 5 = 3x + 1 \neq 3x - 5 \Rightarrow 2$ – не период

г) $y = |x|$ $\quad y(x+2) = |x+2| \neq |x| \Rightarrow 2$ – не период

§2 п.5

77. 1) $y\uparrow$ *при* $x \in [-7;-5] \cup [1;5]$ $\quad y\downarrow$ *при* $x \in [-5;1] \cup [5;7]$

$x_{max} = -5,\ x_{max} = 5,\ x_{min} = 1$ $\quad y(-5) = 5,\ y(5) = 3,\ y(1) = -3$

2) $y\uparrow$ *на* $[-6;-4] \cup [-2;4]$ $\quad y\downarrow$ *на* $[-4;-2] \cup [4;5]$

$x_{max} = -4,\ x_{max} = 4,\ x_{min} = -2$ $\quad y(-2) = -2,\ y(-4) = 3,\ y(4) = 5$

3) $y\uparrow$ *на* $[-3;3]$ $\quad y\downarrow$ *на* $(-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$

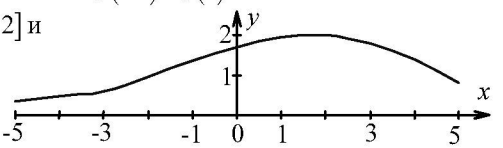
$x_{max} = 3,\ x_{min} = -3$ $\quad y(3) = 2,\ y(-3) = -2$

4) $y\uparrow$ *на* $[-4;-2];\ [0;2];\ [4;6]$ $\quad y\downarrow$ *на* $[-6;-4];\ [-2;0];\ [2;4]$

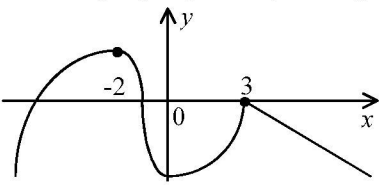
$x_{max} = -2,\ x_{max} = 2$ $\quad x_{min} = -4,\ x_{min} = 4$

$y(-2) = y(2) = 3$ $\quad y(-4) = y(4) = -2$

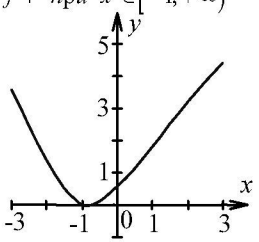
78. а) $f\uparrow$ при $x \in (-\infty; 2]$ и $f\downarrow$ при $x \in [2; +\infty)$



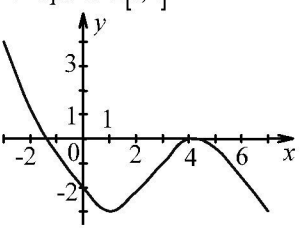
б) $f\uparrow$ *при* $x \in (-\infty;-2] \cup [0;3]$
$f\downarrow$ при $x \in [-2; 0] \cup [3; +\infty)$



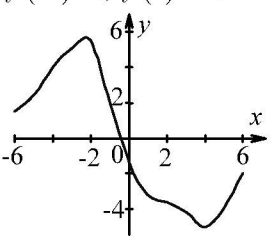
в) $f\downarrow$ *при* $x \in (-\infty;-1]$
$f\uparrow$ *при* $x \in [-1;+\infty)$



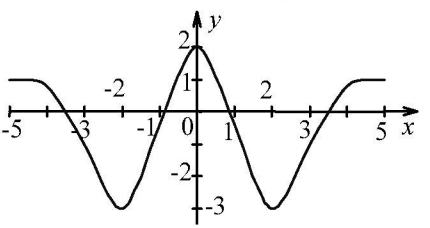
г) $f\downarrow$ *при* $x \in (-\infty;1] \cup [4;+\infty)$
$f\uparrow$ *при* $x \in [1;4]$



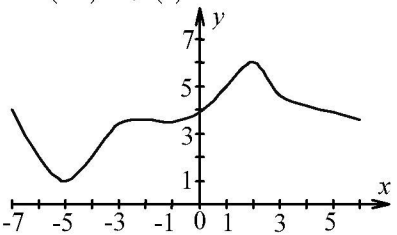
79. а) $x_{max} = -3,\ x_{min} = 4,$
$f(-3) = 5,\ f(4) = -5$



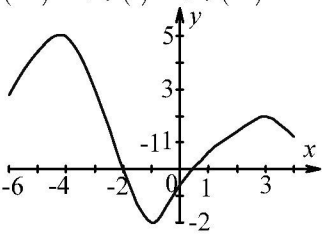
б) $x_{min} = -2, x_{min} = 2, x_{max} = 0,$
$f(-2) = f(2) = -3, f(0) = 2$



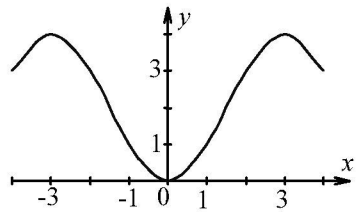
в) $x_{min} = -5; x_{max} = 2;$
$f(-5) = 1; f(2) = 6$



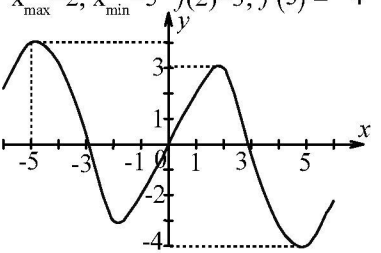
г) $x_{max} = -4;\ x_{max} = 3;\ x_{min} = -1$
$f(-4) = 5;\ f(3) = 2;\ f(-1) = -2$



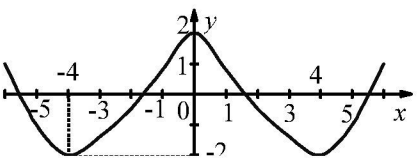
80. а) f – четная, $x_{max} = -3,\ x_{min} = 0$
$f(-3) = 4,\ f(0) = 0$



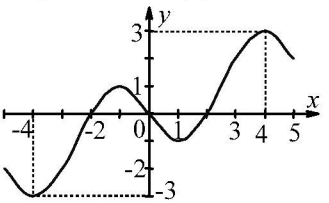
б) f – нечетная,
$x_{max}=2, x_{min}=5\ \ f(2)=3; f(5) = -4$



в) f – четная,
$x_{min} = 4,\ x_{max} = 0,\ x_{min} = -4$
$f(-4) = f(4) = -2,\ f(0) = 2$



г) f – нечетная,
$x_{min} = -4,\ x_{max} = 4$
$f(-4) = -3,\ f(4) = 3$



81. $y = kx + b$

а) $k > 0,\ x \in R$ Пусть $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

$y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1) > 0$

Следовательно, $y_2 > y_1$ при любых $x \in R \Rightarrow y\uparrow$ *при* $x \in R$ *и* $k > 0$

б) $k < 0,\ x \in R$ Пусть $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

$y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1) < 0$

$y_2 < y_1 \Rightarrow y\downarrow$ *при* $x \in R$ *и* $k < 0$

82. а) $y = -x^2 + 6x - 8$ – парабола, ветви вниз. $x_{max} = -\dfrac{6}{-2} = 3$

$y_{max} = -3^2 + 6 \cdot 3 - 8 = 1$ $\qquad y\uparrow$ *на* $(-\infty; 3],\ y\downarrow$ *на* $[3; +\infty)$

Ответ: убывает на $[3; +\infty)$, возрастает на $(-\infty; 3]$; $x_{max} = 3,\ y(3) = 1$

б) $y = (x+2)^4 + 1$ $\qquad x_{min} = -2 \qquad y(-2) = 1$

Ответ: $y\uparrow$ *на* $[-2; +\infty);\ y\downarrow$ *на* $(-\infty; -2]$ $x_{min} = -2,\ y(-2) = 1$

в) $y = x^2 - 4x$ – парабола, ветви вверх.

Ответ: $x_{\min} = 2,\ y(2) = -4$; $y\uparrow$ *на* $[2;+\infty)$; $y\downarrow$ *на* $(-\infty;2]$

г) $y = (x-3)^4$

Ответ: $x_{\min} = 3,\ y(3) = 0$; $y\uparrow$ *на* $[3;+\infty)$; $y\downarrow$ *на* $(-\infty;3]$

83. а) $y = \dfrac{3}{x-2}$ – гипербола.

Ответ: точек экстремума нет, $y\downarrow$ *на* $(-\infty;2)$ *и* $(2;+\infty)$

б) $y = -(x+3)^5$

Ответ: точек экстремума нет, $y\downarrow$ *на* $(-\infty;+\infty)$

в) $y = -\dfrac{1}{x+3}$

Ответ: точек экстремума нет, $y\uparrow$ *на* $(-\infty;-3)$ *и* $(-3;+\infty)$

г) $y = (x-4)^3$

Ответ: точек экстремума нет, $y\uparrow$ *на* $(-\infty;+\infty)$

84. а) $y = 3\sin x - 1$

Ответ: $y\uparrow$ *на* $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $y\downarrow$ *на* $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$

$x_{\max} = \dfrac{\pi}{2}+2\pi k, y(x_{\max}) = 2;\ x_{\min} = -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, y(x_{\min}) = -4$

б) $y = -2\cos x + 1$

Ответ: $y\downarrow$ *на* $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$, $y\uparrow$ *на* $[2\pi k;\pi+2\pi k]$,

$x_{\max} = -\pi+2\pi k,\ y(-\pi+2\pi k) = 3,\ x_{\min} = 2\pi k,\ y(2\pi k) = -1$

в) $y = 2\cos x + 1$

Ответ: $y\uparrow$ *на* $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$, $y\downarrow$ *на* $[2\pi k;\pi+2\pi k]$,

$x_{\max} = 2\pi k, y(2\pi k) = 3;\ x_{\min} = -\pi+2\pi k, y(-\pi+2\pi k) = -1$

г) $y = 0{,}5\sin x - 1{,}5$

Ответ: $y\uparrow$ *на* $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $y\downarrow$ *на* $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$

$x_{\max} = \dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right) = -1;\ x_{\min} = -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ y\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right) = -2;$

85. а) $y = 2\mathrm{tg}x + 1$

Ответ: $y\uparrow$ *на* $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$; точек экстремума нет

б) $y = \sin x + 1$

Ответ: $y\uparrow$ *на* $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $y\downarrow$ *на* $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$

$x_{\min} = -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ y\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right) = 0;\ x_{\max} = \dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right) = 2$

в) $y = -\mathrm{tg}x$ **Ответ:** $y\downarrow$ *на* $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)$, точек экстремума нет

г) $y = \cos x - 1$ **Ответ:** $y\uparrow$ *на* $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$, $y\downarrow$ *на* $[2\pi k;\pi+2\pi k]$

$x_{\min} = -\pi+2\pi k,\ y(-\pi+2\pi k) = -2,\ x_{\max} = 2\pi k,\ y(2\pi k) = 0$

86. а) Ответ: $\cos\frac{3\pi}{7} < \cos\frac{2\pi}{9}$ **б) Ответ:** $\sin\frac{5\pi}{7} > \sin\frac{7\pi}{8}$

в) Ответ: $\mathrm{tg}\frac{9\pi}{7} > \mathrm{tg}\frac{6\pi}{5}$ **г) Ответ:** $\sin\frac{4\pi}{9} > \sin\frac{3\pi}{8}$

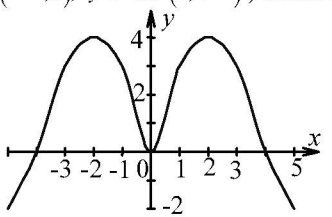
87. а) Ответ: $\sin 3{,}8;\ \sin 3{,}2;\ \sin 1{,}3$ **б) Ответ:** $\cos 1{,}9;\ \cos 1{,}3;\ \cos 0{,}9$

в) Ответ: $tg(-0{,}3);\ \mathrm{tg}0{,}5;\ \mathrm{tg}1{,}4$ **г) Ответ:** $\sin(-1{,}2);\ \sin 0{,}8;\ \sin 1{,}2$

88. а) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$

Ответ: $y\uparrow$ *на* $(-\infty;2)$, $y\downarrow$ *на* $(2;+\infty)$, точек экстремума нет.

б) $y = 4|x| - x^2$



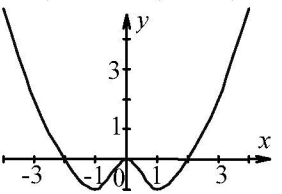
Ответ: $y\uparrow$ *на* $(-\infty;-2]$ *и* $[0;2]$, $y\downarrow$ *на* $[-2;0]$ *и* $[2;+\infty)$

$x_{\min} = 0,\ y(0) = 0;\ x_{\max} = -2,\ x_{\max} = 2,\ y(-2) = y(2) = 4$

в) $y = \frac{1}{(x+1)^3} - 2$

Ответ: $y\downarrow$ *на* $(-\infty;-1)$, $y\uparrow$ *на* $(-1;+\infty)$, точек экстремума нет.

г) $y = x^2 - 2|x|$



Ответ: $y\uparrow$ на $[-1;0]$ и $[1;+\infty)$, $y\downarrow$ на $(-\infty;-1]$ и $[0;1]$

$x_{\min} = -1,\ x_{\min} = 1,\ y(-1) = y(1) = -1;\ x_{\max} = 0,\ y(0) = 0$

89. а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Ответ: $y\uparrow$ *на* $\left[-1\frac{1}{4}\pi + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right]$; $y\downarrow$ *на* $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$

$x_{\min} = -1\frac{1}{4}\pi + 2\pi k,\ y\left(-1\frac{1}{4}\pi + 2\pi k\right) = -1;$

$x_{\max} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ y\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = 1$

б) $y = 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Ответ: $y\downarrow$ *на* $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$; $y\uparrow$ *на* $\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; 1\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$

$x_{\max} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ y\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = 2;\ x_{\min} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ y\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) = 0$

в) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

Ответ: $y\uparrow$ *на* $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$; $y\downarrow$ *на* $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;1\frac{1}{3}\pi+2\pi k\right]$

$x_{\min}=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ y\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)=-1;\ x_{\max}=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ y\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)=1$

г) $y=2+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

Ответ: $y\uparrow$ *на* $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$; $y\downarrow$ *на* $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;1\frac{1}{6}\pi+2\pi k\right]$

$x_{\min}=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ y\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)=1;$

$x_{\max}=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ y\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)=3$

90. а) Ответ: $\cos\frac{25\pi}{9};\ \cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right);\ \cos\frac{4\pi}{9};\ \sin\frac{4\pi}{5}$

б) Ответ: $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right);\mathrm{ctg}\frac{15\pi}{8};\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right);\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}$

в) Ответ: $ctg\frac{9\pi}{10};\ ctg\frac{7\pi}{15};\ ctg\frac{12\pi}{5};\ tg\frac{6\pi}{5}$

г) Ответ: $\sin\left(-\frac{5\pi}{15}\right);\ \cos\frac{13\pi}{24};\ \sin\frac{17\pi}{6};\ \sin\frac{5\pi}{24}$

91. а) $f(x)=x^4+3x \qquad x\in[0;+\infty)$ Пусть $x_1<x_2\Rightarrow x_2-x_1>0$

$(x_1)=x_1^4+3x_1;\ f(x_2)=x_2^4+3x_2;\ f(x_2)-f(x_1)=x_2^4-x_1^4+3(x_2-x_1)=$

$$=\underbrace{\left(x_1^2+x_2^2\right)}_{>0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\underbrace{(x_2+x_1)}_{>0}+3\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}>0$$

Следовательно, $f(x_2)>f(x_1)$ при любых $x\in[0;+\infty)$.

Следовательно $f(x)$ возрастает на $[0;+\infty)$

б) $f(x)=-x^3-2x \qquad x\in R$ Пусть $x_1<x_2\Rightarrow x_2-x_1>0$

$f(x_1)=-x_1^3-2x_1;\ f(x_2)=-x_2^3-2x_2;$

$f(x_2)-f(x_1)=-\left(x_2^3-x_1^3\right)-2(x_2-x_1)=$

$=-(x_2-x_1)\left(x_2^2+x_2\cdot x_1+x_1^2\right)-2(x_2-x_1)=$

$=-\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\underbrace{\left(x_2^2+x_2\cdot x_1+x_1^2+2\right)}_{>0}<0\Rightarrow f(x_2)<f(x_1)\Rightarrow f(x)$ убывает на R

в) $f(x)=x^6-0{,}5 \qquad x\in(-\infty;0]$ Пусть $x_1<x_2\Rightarrow x_2-x_1>0$

$f(x_1)=x_1^6-0{,}5;\ f(x_2)=x_2^6-0{,}5$

$f(x_2)-f(x_1)=x_2^6-x_1^6=\left(x_2^2-x_1^2\right)\left(x_2^4+x_2^2\cdot x_1^2+x_1^4\right)=$

$=\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\underbrace{(x_2+x_1)}_{<0}\underbrace{\left(x_2^4+x_2^2\cdot x_1^2+x_1^4\right)}_{>0}<0\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_2)<f(x_1)\Rightarrow f(x)$ убывает на $(-\infty;0]$

г) $f(x)=x^5+1{,}5x \quad x\in R$ Пусть $x_1<x_2 \Rightarrow x_2-x_1>0$

$f(x_1)=x_1^5-1{,}5x_1;\ f(x_1)=x_2^5-1{,}5x_2$

$$f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{x_2^5-x_1^5}_{\substack{>0,\text{ т.к. } f(x)=x^5\\ \text{возрастает на } R}}+1{,}5\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)\Rightarrow f(x)$ возрастает на R

92.а)Доказать: если f – четная, x_0 точка максимума,
то $-x_0$ – точка максимума. **Доказательство:**
Пусть $x_1<x_0<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_0),\ f(x_2)<f(x_0)$ т.к. x_0 точка максимума. $-x_2<-x_0<-x_1$
$f(-x_2)=f(x_2),\ f(-x_0)=f(x_0),\ f(-x_1)=f(x_1)$ – т.к. $f(x)$ – четная.
Следовательно $f(-x_1)<f(-x_0),\ f(-x_2)<f(-x_0)$.
Отсюда, $-x_0$ – точка максимума.

б) Доказать: если f – нечетная, убывает на $[a;b]$,
то f убывает на $[-b;-a]$ **Доказательство:**
Пусть $-b\le x_1<x_2\le -a$, тогда $a\le -x_2<-x_1\le b$ и
$f(-x_2)>f(-x_1)$, т.к. f убывает на $[a;b]$.
Следовательно , $f(x_2)<f(x_1)$. Отсюда , $f(x)$ убывает на $[-b,-a]$.

в) Доказать: если f – нечетная, x_0 – точка минимума,
то $-x_0$ – точка максимума. **Доказательство:** Пусть $x_1<x_0<x_2$.
$f(x_1)>f(x_0),\ f(x_2)>f(x_0)$ т.к. x_0 – точка минимума.
$-x_2<-x_0<-x_1$
$f(-x_2)=-f(x_2),\ f(-x_0)=-f(x_0),\ f(-x_1)=-f(x_1)$, т.к. $f(x)$ – нечетная.
Отсюда $f(-x_2)<f(-x_0),\ f(-x_1)<f(-x_0)$.
Следовательно , $-x_0$ – точка максимума.

г) Доказать: если f – четная, возрастает на $[a;b]$,
то на $[-b,-a]$ она убывает. **Доказательство:**
Пусть $-b\le x_1<x_2\le -a$, тогда $a\le -x_2<-x_1\le b$ и
$f(-x_1)>f(-x_2)$, т.к. $f(x)$ возрастает на $[a;b]$.
Следовательно $f(x_1)>f(x_2)$, т.к. $f(x)$ – четная.
Отсюда, $f(x)$ убывает на $[-b,-a]$.

§2 п.6

93. а) 1) $D(f)=[-8;5],\ \mathrm{E}(f)=[-2;5]$
2) ни четная, ни нечетная, не периодическая.
3) $x=0 \quad y=2{,}5 \quad (0;2{,}5)-c\ OY \quad y=0 \quad x=1 \quad (1;0)-c\ OX$
4) $f(x)>0$ *на* $[-8;1),\ f(x)<0$ *на* $(1;5),\ f(x)=0$ *при* $x_1=1,\ x_2=5$
5) $f(x)\uparrow$ *на* $[-5;-1];\ [3;5]\ f(x)\downarrow$ *на* $[-8;-5];\ [-1;3]$
6) $x_{\min}=-5,\ x_{\min}=3,\ x_{\max}=-1;\ y(-5)=1;\ y(3)=-2;\ y(-1)=3$
7) асимптот нет.

б) 1) $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty),\ \mathrm{E}(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$
2) ни четная, ни нечетная, не периодическая.

3) с OX и OY пересекается в (0; 0)

4) $f(x) > 0$ *на* $(-\infty; -2), (0; +\infty)$, $f(x) < 0$ *на* $(-2; 0)$, $f(x) = 0$ *при* $x = 0$

5) $f(x)\uparrow$ *на* $(-\infty; -2); (-2; +\infty)$

6) точек экстремума нет

7) вертикал. ассимптота: $x = -2$, горизонтал. ассимптота $y = 2$

в) 1) $D(f) = [-6; 6]$, $E(f) = [-2; 2]$

2) нечетная, периодич. с периодом T = 8.

3) $C\ OX$: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -4$, $y = 0$. $C\ OY$: $x = 0$, $y = 0$

4) $f(x) > 0$ *на* $(-4; 0), (4; 6)$, $f(x) < 0$ *на* $[-6; -4), (0; 4)$

5) $f(x)\uparrow$ *на* $[-6; -2]$; $[2; 6]$ $f(x)\downarrow$ *на* $[-2; 2]$

6) $x_{\min} = 2$, $x_{\min} = -2$, $y(2) = -2$; $y(-2) = 2$

7) асимптот нет

г) 1) $D(f) = [-5; 7]$, $E(f) = [-3; 3]$

2) ни четная, ни нечетная, не периодическая

3) $C\ OX$: $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$ $y = 0$. $C\ OY$: $x = 0$, $y = 1$

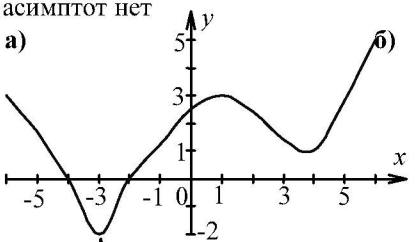
4) $f(x) > 0$ *на* $[-5; 4), (-1; 1), (5; 7]$ $f(x) < 0$ *на* $(-4; -1), (1; 5)$

5) $f(x)\uparrow$ *на* $[-3; 0]$; $[3; 7]$ $f(x)\downarrow$ *на* $[-5; -3]$; $[0; 3]$

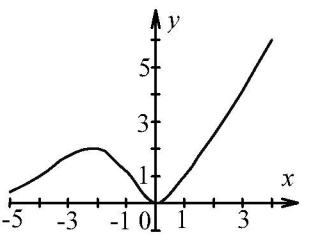
6) $x_{\min} = -3$, $x_{\min} = 3$, $y(-3) = -2$; $y(3) = -3$; $x_{\max} = 0$, $y(0) = 1$

7) асимптот нет

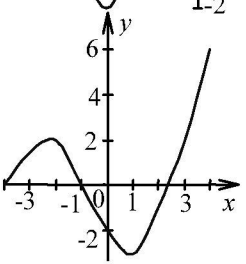
94. а)



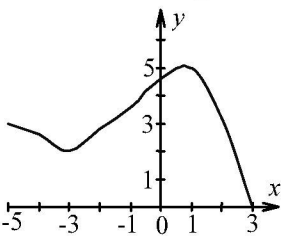
б)



в)



г)



95. а) $f(x) = 5 - 2x$ 1) $D(f) = R$, $E(f) = R$

2) общего вида

3) $(2{,}5; 0)$; $(0; 5)$

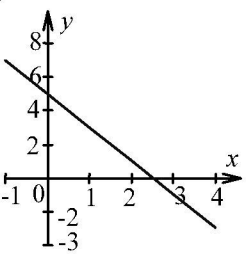
4) $f(x) > 0$ *на* $(-\infty; 2{,}5)$

$f(x) < 0$ *на* $(2{,}5; +\infty)$

5) $f(x)\downarrow$ *на* $(-\infty; +\infty)$

6) точек экстремума нет

7) асимптот нет



б) $f(x)=3-2x-x^2$ 1) $D(f)=R,\ \mathrm{E}(f)=(-\infty;\ 4]$

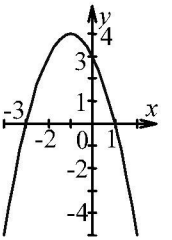
2) общего вида

3) $3-2x-x^2=0$; $x_1=-3,\ x_2=1$ $(-3;0);\ (1;0);\ (0;3)$

4) $f(x)>0$ *на* $(-3;1)$; $f(x)<0$ *на* $(-\infty;3);\ (1;+\infty)$

5) $f(x)\uparrow$ *на* $(-\infty;-1]$; $f(x)\downarrow$ *на* $[-1;+\infty)$

6) $x_{\max}=-1,\ y(-1)=4$



в) $f(x)=3x-2$ 1) $D(f)=R,\ \mathrm{E}(f)=R$

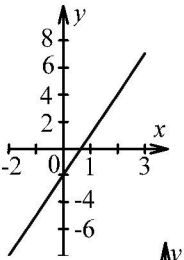
2) общего вида 3) $(0;-2);\ \left(\frac{2}{3};0\right)$

4) $f(x)>0$ *на* $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$;

$f(x)<0$ *на* $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$

5) $f(x)\uparrow$ на R

6) точек экстремума нет



г) $f(x)=x^2-3x+2$

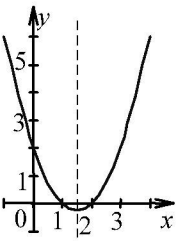
1) $D(f)=R,\ \mathrm{E}(f)=\left[-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$

2) общего вида 3) $(1;0);\ (2;0);\ (0;2)$

4) $f(x)>0$ *на* $(-\infty;1);\ (2;+\infty)$; $f(x)<0$ *на* $(1;2)$

5) $f(x)\uparrow$ *на* $[1{,}5;+\infty)$; $f(x)\downarrow$ *на* $(-\infty;1{,}5]$

6) $x_{\min}=1{,}5;\ y(1{,}5)=-\frac{1}{4}$



96. а) $f(x)=\frac{1}{x}-2$ 1) $D(f)$: $x\neq 0,\ \mathrm{E}(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$

2) $x\neq 0,\ \ y=0,\ x=\frac{1}{2}$ *с* OX $(\cdot)$ пересечения с OY нет

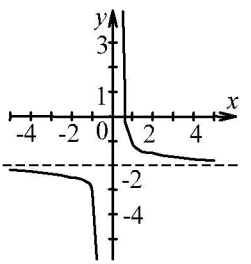
3) $f(x)>0$ *на* $\left(0;\frac{1}{2}\right)$

$f(x)<0$ *на* $(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$

4) $f(x)\downarrow$ *на* $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

5) точек экстремума нет

6) вертикальная асимптота $x=0$, горизонтальная асимптота $y=-2$



б) $f(x)=-(x-3)^4$ 1) $D(f)=(-\infty;\infty)$ $\mathrm{E}(f)=(-\infty;0]$

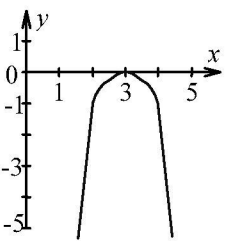
2) общего вида

3) $y=0$ $x=3$ *с* OX; $x=0$ $y=-81$ *с* OY

4) $y<0$ *на* $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$

5) $y\uparrow$ *на* $(-\infty;3]$; $y\downarrow$ *на* $[3;+\infty)$

6) $x_{\max}=3$ $y(3)=0$



в) $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)}$ 1) $D(f): x\neq -2$ $E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

2) общего вида

3) $y\neq 0,\ x=0\ \ y=\dfrac{1}{2}$ *с* OY

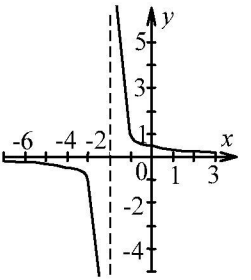
4) $y>0$ *на* $(-2;+\infty)$ $y<0$ *на* $(-\infty;-2)$

5) $y\downarrow$ *на* $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$

6) точек экстремума нет

7) вертикальная асимптота $x=-2$,

горизонтальная асимптота $y=0$



г) $f(x)=x^3-1$ 1) $D(f)=R$ $E(f)=R$

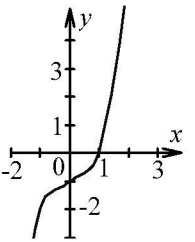
2) общего вида

3) $x=0\ \ y=-1$ *с* OY ; $y=0\ \ x=1$ *с* OX

4) $y>0$ *на* $(1;+\infty)$; $y<0$ *на* $(-\infty;1)$

5) $y\uparrow$ *на* $(-\infty;+\infty)$

6) точек экстремума нет



97. а) $f(x)=\sqrt{x-3}$

1) $D(f)=[3;+\infty)$ $E(f)=[0;+\infty)$

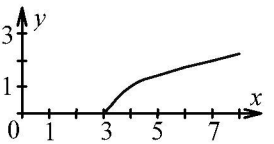
2) общего вида

3) $y=0\ \ x=3$ *с* OX

4) $y>0$ *на* $(3;+\infty)$

5) $y\uparrow$ *на* $[3;+\infty)$

6) точек экстремума нет



б) $f(x)=4x-x^2$ 1) $D(f)=R$ $E(f)=(-\infty;4]$

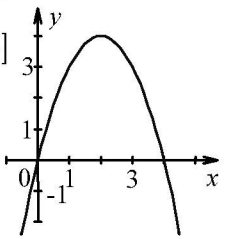
2) общего вида

3) $y=0\ \ x_1=0,\ x_2=4$ *с* OX ; $x=0\ \ y=0$

4) $y>0$ *на* $(0;4)$; $y<0$ *на* $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$

5) $y\uparrow$ *на* $(-\infty;2]$; $y\downarrow$ *на* $[2;+\infty)$

6) $x_{\max}=2\ \ y(2)=4$



в) $f(x)=\sqrt{x+1}$ 1) $D(f)=[-1;+\infty)$ $E(f)=[0;+\infty)$

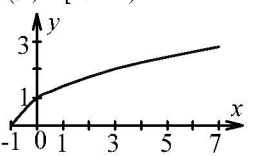
2) общего вида

3) $y=0\ \ x=-1$ *с* OX ; $x=0\ \ y=1$ *с* OY

4) $y>0$ *на* $(-1;\infty)$

5) $y\uparrow$ *на* $[-1;\infty)$

6) точек экстремума нет



г) $f(x)=4-x^2$ 1) $D(f)=R$ $E(f)=(-\infty;4]$

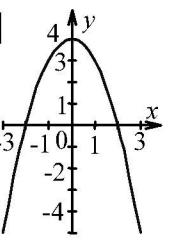
2) четная

3) $x=0\ \ y=4$ *с* OY ; $y=0\ \ x_1=2\ \ x_2=-2$ *с* OX

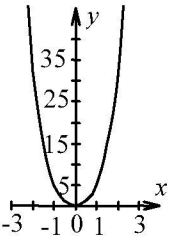
4) $y>0$ *на* $(-2;2)$; $y<0$ *на* $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$

5) $y\uparrow$ *на* $(-\infty;0]$; $y\downarrow$ *на* $[0;+\infty)$

6) $x_{\max}=0\ \ y(0)=4$

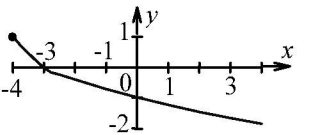


98. а) $f(x) = x^4 + 4x^2$



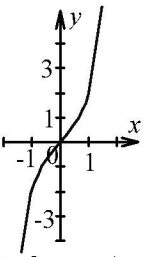
1) $D(f) = R$ $\quad E(f) = [0; +\infty)$
2) четная
3) $y = 0$ $x = 0$ *с* OX *и* OY
4) $y \geq 0$ *на* R
5) $y\uparrow$ *на* $[0; +\infty)$; $y\downarrow$ *на* $(-\infty; 0]$
6) $x_{\min} = 0$ $y(0) = 0$

б) $f(x) = 1 - \sqrt{x+4}$



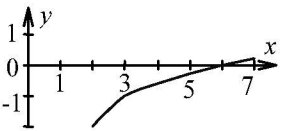
1) $D(f) = [-4; +\infty)$ $\quad E(f) = (-\infty; 1]$
2) общего вида
3) $y = 0$ $x = -3$ *с* OX; $x = 0$ $y = -1$ *с* OY
4) $y > 0$ *на* $[-4; -3)$; $y < 0$ *на* $(-3; \infty)$
5) $y\downarrow$ *на* $[-4; +\infty)$
6) точек экстремума нет

в) $f(x) = x^3 + x$ $\quad$ 1) $D(f) = R$, $E(f) = R$



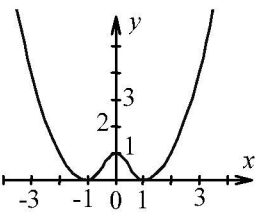
2) нечетная
3) $y = 0$, $x = 0$ *с* OX *и* OY
4) $y > 0$ *на* $(0; +\infty)$ $y < 0$ *на* $(-\infty; 0)$
5) $y\uparrow$ *на* $(-\infty; +\infty)$
6) точек экстремума нет

г) $f(x) = \sqrt{x-2} - 2$ $\quad$ 1) $D(f) = [2; +\infty)$ $\quad E(f) = [-2; +\infty)$
2) общего вида



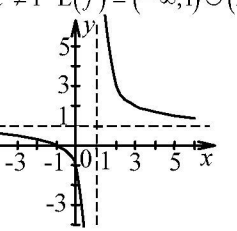
3) $y = 0$, $x = 6$ *с* OX $\quad y \neq 0$
4) $y > 0$ *на* $(6; +\infty)$ $y < 0$ *на* $[2; 6)$
5) $y\uparrow$ *на* $[2; \infty)$
6) точек экстремума нет

99. а) $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$



1) $D(f) = R$ $\quad E(f) = [0; +\infty)$
2) четная, не периодическая.
3) $y = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ *с* OX
$x = 0$, $y = 1$ *с* OY
4) $y \geq 0$ *на* R
5) $y\uparrow$ *на* $[-1; 0]$; $[1; +\infty)$, $y\downarrow$ *на* $(-\infty; -1]$; $\cup[0; 1]$
6) $x_{\max} = 0$, $y(0) = 1$, $x_{\min} = -1, x_{\min} = 1$, $y(-1) = y(1) = 0$

б) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ $\quad$ 1) $D(f)$: $x \neq 1$ $E(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$



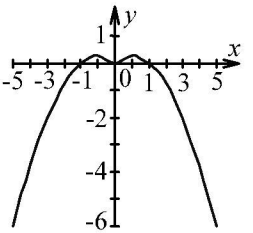
2) общего вида
3) $x = 0$, $y = -1$, $y = 0$, $x = -1$
4) $y > 0$ *на* $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
$y < 0$ *на* $(-1; 1)$
5) $y\downarrow$ *на* $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$
6) точек экстремума нет

в) $f(x)=|x|-x^2$ 1) $D(f)=R$ $E(f)=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$

2) четная

3) $y=0,\ x_1=-1,;\ x_2=0,\ x_3=1$ *с* OX

$x=0,\ y=0$ *с* OY



4) $y>0$ *на* $(-1;0)\cup(0;1)$

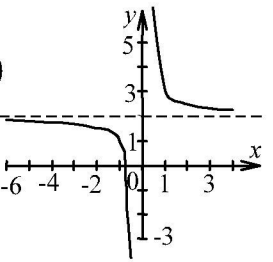
$y<0$ *на* $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

5) $y\uparrow$ *на* $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right];\cup\left[0;\frac{1}{2}\right];$

$y\downarrow$ *на* $\left[-\frac{1}{2};0\right];\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

6) $x_{\max}=-\frac{1}{2},\ x_{\max}=\frac{1}{2},\ y\left(-\frac{1}{2}\right)=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\ x_{\min}=0, y(0)=0$

г) $f(x)=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$



1) $D(f)$: $x\neq 0$ $E(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

2) общего вида 3) $y=0,\ x=-\frac{1}{2}$

4) $y>0$ *на* $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(0;+\infty)$

$y<0$ *на* $\left(-\frac{1}{2};0\right)$

5) $y\downarrow$ *на* $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ 6) точек экстремума нет

100. а) $tg\frac{18\pi}{5}=tg\frac{3\pi}{5}=-tg\frac{2\pi}{5}$ $\sin\frac{28\pi}{3}=\sin\frac{4\pi}{3}=-\sin\frac{\pi}{3}$

б) $\cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right)=-\cos\frac{7\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}$ $ctg\left(-\frac{8\pi}{5}\right)=-ctg\frac{3\pi}{5}=ctg\frac{2\pi}{5}$

в) $\sin\left(-\frac{14\pi}{5}\right)=-\sin\frac{4\pi}{5}=-\sin\frac{\pi}{5}$ $tg\frac{15\pi}{8}=tg\frac{7\pi}{8}=-tg\frac{\pi}{8}$

г) $\cos\frac{20\pi}{7}=\cos\frac{6\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}$ $ctg\frac{35\pi}{9}=ctg\frac{8\pi}{9}=-ctg\frac{\pi}{9}$

Ответ: а) $-tg\frac{2\pi}{5}$; $-\sin\frac{\pi}{3}$; **б)** $-\cos\frac{\pi}{8}$; $ctg\frac{2\pi}{5}$;

в) $-\sin\frac{\pi}{5}$; $-tg\frac{\pi}{8}$; **г)** $-\cos\frac{\pi}{7}$; $-ctg\frac{\pi}{9}$

101. а) $f(x)=3\cos 2x-1$ **Ответ:** $D(f)=R,\ E(f)=[-4;2]$

б) $f(x)=2-ctg3x$ **Ответ:** $D(f)$: $x\neq\frac{k\pi}{3},\ E(f)=R$

в) $f(x)=2tg\frac{x}{2}$ **Ответ:** $D(f)$: $x\neq\pi+2\pi k,\ E(f)=R$

г) $f(x)=1+0{,}5\sin\frac{x}{2}$ **Ответ:** $D(f)=R,\ E(f)=[0{,}5;1{,}5]$

102. а) $f(x)=-\sin 3x$ $-\sin 3x=0\ \ x=\frac{k\pi}{3},\ k\in Z$

Ответ: $f(x)=0$ *при* $x=\frac{k\pi}{3}$

$f(x)>0$ при $-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}<x<\frac{2k\pi}{3}$ $f(x)<0$ при $\frac{2k\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{3}$

б) $f(x)=tg\frac{2x}{3}$ $D(f)$: $x\neq\frac{3\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}$ $\mathrm{tg}\frac{2x}{3}=0;\ \frac{2x}{3}=0;\ x=\frac{3k\pi}{2}, k\in Z$

Ответ: $f(x)=0$ *при* $x=\frac{3k\pi}{2},\ k\in Z$

$f(x)>0$ *при* $\frac{3k\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}$ $f(x)<0$ *при* $-\frac{3\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}<x<\frac{3k\pi}{2}$

в) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ $f(x)=0;\ x=\pi+2k\pi, k\in Z$

Ответ: $f(x)=0$ *при* $x=\pi+2k\pi,\ k\in Z$

$f(x)>$ при $-\pi+4k\pi<x<\pi+4k\pi$; $f(x)<0$ при $\pi+4k\pi<x<3\pi+4k\pi$

г) $f(x)=ctg2x$ $D(f)$: $x\neq\frac{k\pi}{2}$ $ctg2x=0$ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$

Ответ: $f(x)=0$ *при* $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $f(x)>0$ *при* $\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$

$f(x)<0$ при $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$

103. а) $f(x)=4\cos 3x$

Ответ: $f(x)\uparrow$ *на* $\left[-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3};\frac{2k\pi}{3}\right]$ $f(x)\downarrow$ *на* $\left[\frac{2k\pi}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right]$

$x_{\max}=\frac{2k\pi}{3},\ f\left(\frac{2k\pi}{3}\right)=4$ $x_{\min}=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)=-4$

б) $f(x)=0,5\mathrm{ctg}\frac{x}{4}$ **Ответ:** $f(x)\downarrow$ на $(4\pi k;\ 4\pi+4\pi k)$ точек экстремума нет. Промежутков возрастания нет

в) $f(x)=2tg\frac{x}{2}$

Ответ: $f(x)\uparrow$ на $(-\pi+2\pi k;\ \pi+2\pi k)$; $f(x)\downarrow$ на $(4\pi k;\ 4\pi+4\pi k)$ точек экстремума нет, промежутков убывания нет

г) $f(x)=0,2\sin 4x$

Ответ: $f(x)\uparrow$ *на* $\left[-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right]$ $f(x)\downarrow$ *на* $\left[\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2};\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right]$

$x_{\max}=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)=0,2$ $x_{\min}=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, f\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)=-0,2$

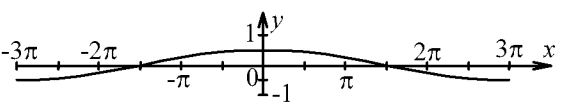
104. а) $f(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$ 1) $D(f)=R,\ E(f)=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

2) четная, $T=6\pi$ 3) $y=0$ $x=\frac{3\pi}{2}+3k\pi$ *с* OX; $x=0$ $y=0,5$ *с* OY

4) $y>0$ *на* $\left(-\frac{3\pi}{2}+6k\pi;\frac{3\pi}{2}+6k\pi\right)$, $y<0$ *на* $\left(\frac{3\pi}{2}+6k\pi;\frac{9\pi}{2}+6k\pi\right)$

5) $y\uparrow$ *на* $[-3\pi+6k\pi;6k\pi]$, $y\downarrow$ *на* $[6k\pi;3\pi+6k\pi]$

6) $x_{\min}=3\pi+6k\pi,\ y_{\min}=-0,5;\ x_{\max}=6k\pi,\ y_{\max}=0,5$



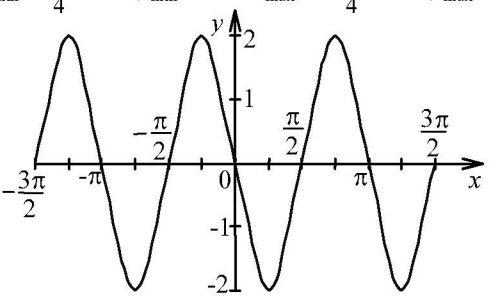
б) $f(x) = -2\sin 2x$ 1) $D(f) = R,\ \mathrm{E}(f) = [-2;2]$

2) нечетная, $T = \pi$ 3) $y = 0\ \ x = \frac{k\pi}{2}$ *с* OX; $x = 0\ \ y = 0$ *с* OY

4) $y > 0$ *на* $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi\right)$, $y < 0$ *на* $\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

5) $y \uparrow$ на $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right]$, $y \downarrow$ на $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

6) $x_{\min} = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ y_{\min} = -2;\ x_{\max} = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ y_{\max} = 2$



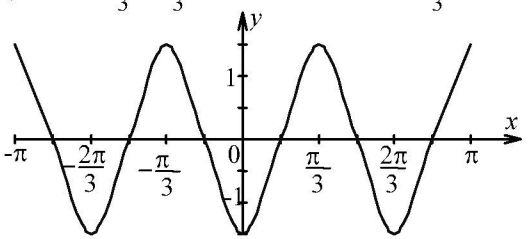
в) $f(x) = -1{,}5\cos 3x$ 1) $D(f) = R,\ \mathrm{E}(f) = [-1{,}5;1{,}5]$

2) четная $T = \frac{2\pi}{3}$ 3) $y = 0\ \ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ *с* OX $x = 0\ \ y = -1{,}5$ *с* OY

4) $y < 0$ *на* $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)$, $y > 0$ *на* $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)$

5) $y \downarrow$ *на* $\left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{2k\pi}{3}\right]$, $y \uparrow$ *на* $\left[\frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right]$

6) $x_{\max} = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ y_{\max} = 1{,}5;\ \ x_{\min} = \frac{2k\pi}{3},\ y_{\min} = -1{,}5$



г) $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$ 1) $D(f) = R,\ \mathrm{E}(f) = [-3;3]$

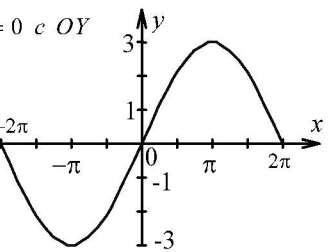
2) нечетная $T = 4\pi$

3) $y = 0\ \ x = 2k\pi$ *с* OX $x = 0\ \ y = 0$ *с* OY

4) $y < 0$ на $(-2\pi + 4k\pi;\ 4k\pi)$,
$y > 0$ на $(4k\pi;\ 2\pi + 4k\pi)$

5) $y \downarrow$ на $[\pi + 4k\pi;\ 3\pi + 4k\pi]$,
$y \uparrow$ на $[-\pi + 4k\pi;\ \pi + 4k\pi]$

6) $x_{\max} = \pi + 4k\pi,\ y_{\max} = 3;$
$x_{\min} = -\pi + 4k\pi,\ y_{\min} = -3$

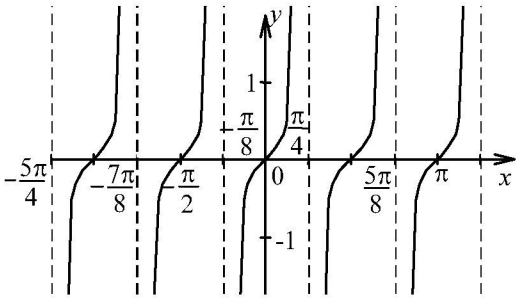


105. а) $f(x)=\frac{1}{2}tg2x$ 1) $D(f)$: $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $E(f)=R$

2) нечетная, $T=\frac{\pi}{2}$ 3) $y=0$ $x=\frac{k\pi}{2}$ *с* OX $x=0$ $y=0$ *с* OY

4) $y<0$ *на* $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\frac{k\pi}{2}\right)$, $y>0$ *на* $\left(\frac{k\pi}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$

5) $y\uparrow$ *на* $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$ 6) точек экстремума нет



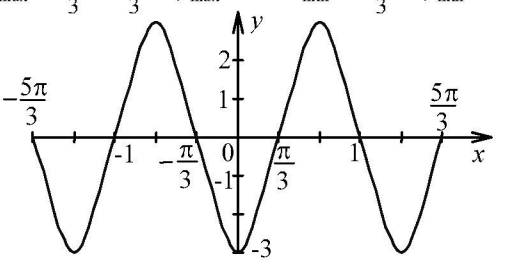
б) $f(x)=-3\cos\frac{3x}{2}$ 1) $D(f)=R$, $E(f)=[-3;3]$

2) четная $T=\frac{4\pi}{3}$ 3) $y=0$ $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$ *с* OX $x=0$ $y=-3$ *с* OY

4) $y<0$ на $\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}\right)$, $y>0$ на $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3};\pi+\frac{4\pi k}{3}\right)$

5) $y\downarrow$ *на* $\left[-\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3};\frac{4k\pi}{3}\right]$, $y\uparrow$ *на* $\left(\frac{4k\pi}{3};\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}\right)$

6) $x_{\max}=\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}$, $y_{\max}=3$; $x_{\min}=\frac{4k\pi}{3}$, $y_{\min}=-3$



в) $f(x)=-2ctg\frac{x}{3}$ 1) $D(f)$: $x\neq 3k\pi$, $E(f)=R$

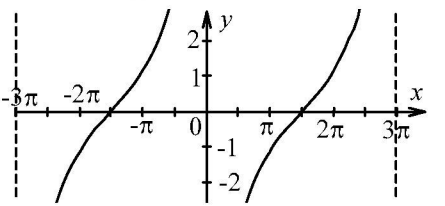
2) нечетная $T=3\pi$ 3) $y=0$ $x=\frac{3\pi}{2}+3k\pi$ *с* OX $x\neq 0$

4) $y<0$ на $\left(3\pi k;\frac{3\pi}{2}+3\pi k\right)$,

$y>0$ на $\left(-\frac{3\pi}{2}+3\pi k;3\pi k\right)$

5) $y\uparrow$ *на* $(3\pi k;3\pi+3\pi k)$

6) точек экстремума нет



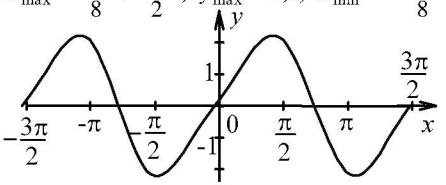
г) $f(x)=2{,}5\sin\frac{4x}{3}$ 1) $D(f)=R,\ E(f)=[-2{,}5;2{,}5]$

2) нечетная, $T=\frac{3\pi}{2}$ 3) $y=0\ \ x=\frac{3k\pi}{4}$ *с* OX $x=0\ \ y=0$ *с* OY

4) $y<0$ *на* $\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi k}{2};\frac{3\pi k}{2}\right)$, $y>0$ *на* $\left(\frac{3\pi k}{2};\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi k}{2}\right)$

5) $y\downarrow$ на $\left[\frac{3\pi}{8}+\frac{3k\pi}{2};-\frac{3\pi}{8}+\frac{3k\pi}{2}\right]$, $y\uparrow$ *на* $\left[-\frac{3\pi}{8}+\frac{3k\pi}{2};\frac{3\pi}{8}+\frac{3k\pi}{2}\right]$

6) $x_{\max}=\frac{3\pi}{8}+\frac{3k\pi}{2}$, $y_{\max}=2{,}5$; $x_{\min}=-\frac{3\pi}{8}+\frac{3k\pi}{2}$, $y_{\min}=-2{,}5$



106. а) $x(t)=3{,}5\cos 4\pi t,\ t_1=\frac{1}{12}c$

Ответ: $A=3{,}5;\ T=\frac{1}{2};\ \omega=4\pi;\ x(t_1)=1\frac{3}{4}$

б) $x(t)=5\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{6}\right),\ t_1=4{,}5c$

Ответ: $A=5;\ T=\frac{2}{3};\ \omega=3\pi;\ x(t_1)=2{,}5$

в) $x(t)=1{,}5\cos 6\pi t,\ t_1=1\frac{1}{3}c$ **Ответ:** $A=1{,}5;\ T=\frac{1}{3};\ \omega=6\pi;\ x(t_1)=1{,}5$

г) $x(t)=0{,}5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{3}\right),\ t_1=8c$ **Ответ:** $A=0{,}5;\ T=4;\ \omega=\frac{\pi}{2};\ x(t_1)=\frac{1}{4}$

107. а) $I(t)=0{,}25\sin 50\pi t$ **Ответ:** $A=0{,}25A;\ T=\frac{1}{25};\ \omega=50\pi\ 1/c$

б) $I(t)=5\sin 20\pi t$ **Ответ:** $A=5A;\ T=\frac{1}{10};\ \omega=20\pi\ 1/c$

в) $I(t)=0{,}5\sin 10\pi t$ **Ответ:** $A=0{,}5A;\ T=\frac{1}{5};\ \omega=10\pi\ 1/c$

г) $I(t)=3\sin 30\pi t$ **Ответ:** $A=3A;\ T=\frac{1}{15};\ \omega=30\pi\ 1/c$

108. а) $U(t)=220\cos 60\pi t$ **Ответ:** $A=220B;\ T=\frac{1}{30};\ \omega=60\pi\ 1/c$

б) $U(t)=110\cos 30\pi t$ **Ответ:** $A=110B;\ T=\frac{1}{15};\ \omega=30\pi\ 1/c$

в) $U(t)=360\cos 20\pi t$ **Ответ:** $A=360B;\ T=\frac{1}{10};\ \omega=20\pi\ 1/c$

г) $U(t)=180\cos 45\pi t$ **Ответ:** $A=180B;\ T=\frac{2}{45};\ \omega=45\pi\ 1/c$

109. Ответ:

а) $\cos 9;\ \cos 4;\ \cos 7;\ \cos(-12{,}5)$ **б)** $\mathrm{tg}4;\ \mathrm{tg}16;\ \mathrm{tg}1{,}3;\ \mathrm{tg}(-8)$

в) $\sin 10{,}5;\ \sin(-7);\ \sin 6{,}7;\ \sin 20{,}5$ **г)** $ctg15;\ ctg5;\ ctg(-9);\ ctg3{,}5$

110. а) $y=\dfrac{1}{1-\sin x}$ $D(f)$: $1-\sin x\neq 0$ **Ответ:** $D(f)$: $x\neq\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

б) $y=\sqrt{\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}}$ $D(f)$: $\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}\geq 0$

$-\cos x\geq 0;\ \cos x\leq 0;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\leq x\leq\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k$

Ответ: $D(f)=\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right],\ k\in Z$

в) $y=\dfrac{1}{\cos x-1}$ $D(f)$: $\cos x-1\neq 0$ **Ответ:** $D(f)$: $x\neq 2k\pi,\ k\in Z$

г) $y=\sqrt{tgx+ctgx}$ $D(f)$: $tgx+ctgx\geq 0$ $\dfrac{tg^2x+1}{tgx}\geq 0$

$t=tgx;\ \dfrac{t^2+1}{t}\geq 0;\ t>0;\ tgx>0$ $\mathrm{k}\pi<\mathrm{x}<\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{k}\pi,\mathrm{k}\in\mathrm{Z}$

Ответ: $\mathrm{D(f)}=\left(\mathrm{k}\pi;\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{k}\pi\right),\mathrm{k}\in\mathrm{Z}$

111. а) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ т.к. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=A$ $\mid :2$

$\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\dfrac{A}{2}$ $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{A}{2}$

$-1\leq\dfrac{A}{2}\leq 1\Rightarrow -2\leq A\leq 2$ **Ответ:** $\mathrm{E}(f)=[-2;2]$

б) $y=\dfrac{3}{1+tg^2x}$ **Ответ:** $\mathrm{E}(f)=(0;3]$

в) $y=\sqrt{1-\cos 4x}$ т.к. $\sqrt{1-\cos 4x}=\sqrt{2\sin^2 2x}=\sqrt{2}|\sin 2x|$

Ответ: $\mathrm{E}(f)=\left[0;\sqrt{2}\right]$

г) $y=\dfrac{2}{1+ctg^2x}$ **Ответ:** $\mathrm{E}(f)=(0;2]$

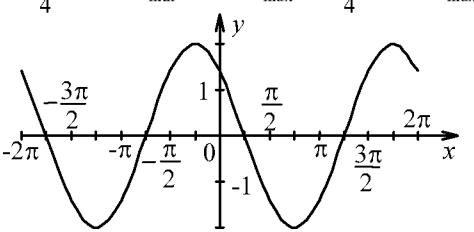
112. а) $f(x)=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 1) $D(f)=R,\ \mathrm{E}(f)=[-2;2]$

2) $T=2\pi$ 3) $y=0\ \ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=0\ \ y=\sqrt{2}$

4) $y>0$ *на* $\left(-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi;\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, $\mathrm{y}<0$ на $\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi\mathrm{k};\dfrac{5\pi}{4}+2\mathrm{k}\pi\right)$

5) $y\uparrow$ *на* $\left[-\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi;-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right]$, $y\downarrow$ *на* $\left[-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi;\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$

6) $x_{\min}=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\ \ y_{\min}=-2,\ x_{\max}=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\ \ y_{\max}=2$



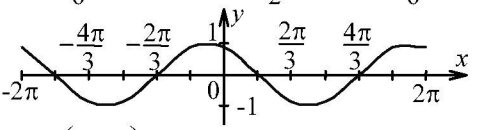
б) $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 1) $D(f)=R,\ \mathrm{E}(f)=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

2) $T=2\pi$ 3) $y=0\ \ x=\frac{\pi}{3}+k\pi;\ \ x=0\ \ y=\frac{\sqrt{3}}{4}$

4) $y>0$ *на* $\left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right),\ \ y<0$ *на* $\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)$

5) $\mathrm{y}\uparrow$ на $\left[\frac{5\pi}{6}+2\mathrm{k}\pi;\frac{11\pi}{6}+2\mathrm{k}\pi\right],\ \ y\downarrow$ *на* $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$

6) $\mathrm{x}_{\min}=-\frac{\pi}{6}+2\mathrm{k}\pi,\ \mathrm{y}_{\min}=-\frac{1}{2},\ \mathrm{x}_{\max}=-\frac{\pi}{6}+2\mathrm{k}\pi,\ \mathrm{y}_{\max}=\frac{1}{2}$

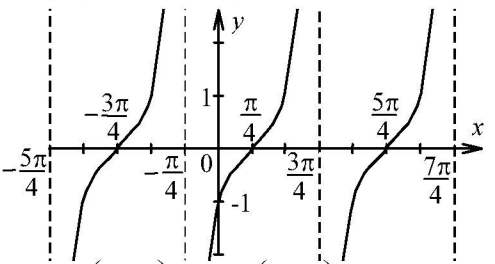


в) $f(x)=tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 1) $D(f)$: $x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ \mathrm{E}(f)=R$

2) $T=\pi$ 3) $y=0\ \ x=\frac{\pi}{4}+k\pi;\ \ x=0\ \ y=0$

4) $y>0$ *на* $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right),\ y<0$ *на* $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$

5) $y\uparrow$ *на* $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)$ 6) точек экстремума нет



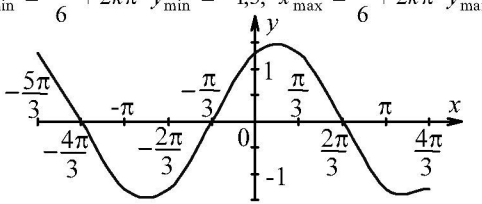
г) $f(x)=1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1{,}5\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 1) $D(f)=R,\ \mathrm{E}(f)=[-1{,}5;1{,}5]$

2) $T=2\pi$ 3) $y=0\ \ x=\frac{2\pi}{3}+k\pi;\ \ x=0\ \ y=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

4) $y>0$ *на* $\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right),\ \ y<0$ *на* $\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)$

5) $y\uparrow$ *на* $\left[-\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right],\ \ y\downarrow$ *на* $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right]$

6) $x_{\min}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ \ y_{\min}=-1{,}5,\ \ x_{\max}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ y_{\max}=1{,}5$



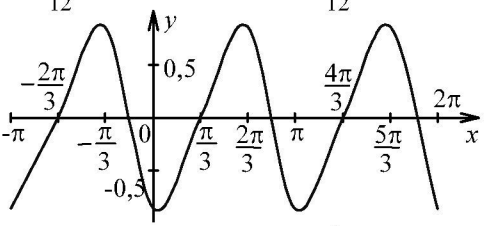
113. а) $f(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$ 1) $D(f)=R,\ \mathrm{E}(f)=[-1;1]$

2) $T=\pi$ 3) $y=0\ \ x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2};\ x=0\ \ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $y>0$ *на* $\left(-\frac{2\pi}{3}+k\pi;-\frac{\pi}{6}+k\pi\right)$, $y<0$ *на* $\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{3}+k\pi\right)$

5) $y\uparrow$ *на* $\left[\frac{\pi}{12}+k\pi;\frac{7\pi}{12}+k\pi\right]$, $y\downarrow$ *на* $\left[\frac{7\pi}{12}+k\pi;\frac{13\pi}{12}+k\pi\right]$

6) $x_{\min}=\frac{\pi}{12}+k\pi\ \ y_{\min}=-1,\ x_{\max}=\frac{7\pi}{12}+k\pi\ \ y_{\max}=1$



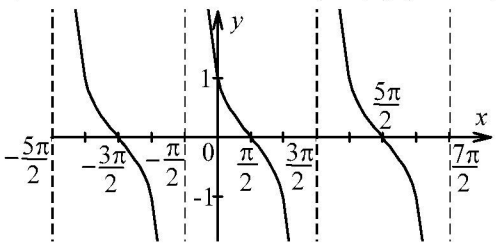
б) $f(x)=ctg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 1) $D(f)\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $\mathrm{E}(f)=R$

2) $T=2\pi$ 3) $y=0\ \ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ x=0\ \ y=1$

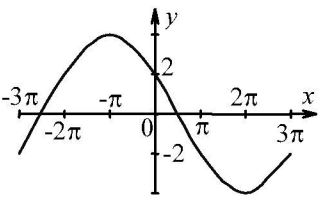
4) $y>0$ *на* $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $y<0$ *на* $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$

5) $y\downarrow$ *на* $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$ 6) точек экстремума нет

7) дополнительные точки $(2\pi k;1)$; $(\pi+2\pi k;-1)$



в) $f(x)=4\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$



1) $D(f)=R,\ \mathrm{E}(f)=[-4;4]$

2) $T=6\pi$

3) $y=0\ \ x=\frac{\pi}{2}+3k\pi;\ x=0\ \ y=2$

4) $y>0$ на $\left(-2\frac{1}{2}\pi+6k\pi;\ \frac{\pi}{2}+6k\pi\right)$, $y<0$ на $\left(\frac{\pi}{2}+6k\pi;\ 3\frac{1}{2}\pi+6k\pi\right)$

5) $y\uparrow$ на $[-4\pi+6k\pi;\ -\pi+6k\pi]$, $y\downarrow$ на $[-\pi+6k\pi;2\pi+6k\pi]$

6) $x_{\min}=2\pi+6k\pi;\ y_{\min}=-4,\ x_{\max}=-\pi+6k\pi,\ y_{\max}=4$

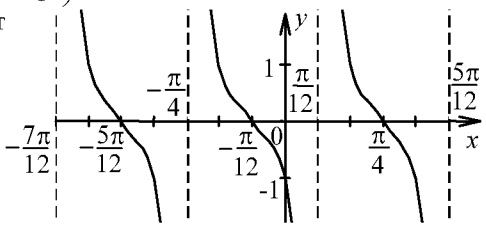
г) $f(x)=tg\left(\frac{3\pi}{4}-3x\right)=-tg\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 1) $D(f)$: $x\neq\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}$, $E(f)=R$

2) $T=\frac{\pi}{3}$ 3) $y=0,\ x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3};\ x=0,\ y=-1$

4) $y>0$ *на* $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3};\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right)$, $y<0$ *на* $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3};\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)$

5) $y\downarrow$ на $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3};\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)$ $k\in Z$ промежутков возрастания нет

6) точек экстремума нет



114. а) $A=30A;\ T=0{,}4;\ I=30\sin 5\pi t$

б) $A=180B;\ T=0{,}08;\ U=180\sin 25\pi t$

в) $A=24A;\ T=1{,}2;\ I=24\sin\frac{5}{3}\pi t$ **г)** $A=200B;\ T=0{,}8;\ U=200\sin 2{,}5\pi t$

115. а) $5\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right)-\max?$ $\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1$ $t=?$

$\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}=2k\pi$ $\frac{\pi t}{4}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $t=-\frac{4}{3}+8k,\ k\in Z$ $t=-\frac{4}{3}+8=6\frac{2}{3}$

Ответ: $t=6\frac{2}{3}$

б) $5\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=2{,}5$ $\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $\frac{\pi t}{4}=-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $t=-\frac{4}{3}\pm\frac{4}{3}+8k,\ k\in Z$

$t_1=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+8=8$ $t_2=-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+8=5\frac{1}{3}$ **Ответ:** $t=5\frac{1}{3}$

в) $5\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=0$ $\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\frac{\pi t}{4}=\frac{\pi}{6}+k\pi$ $t=\frac{2}{3}+4k,\ k\in Z$ **Ответ:** $t=\frac{2}{3}$

г) $5\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=-5$ $\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ $\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}=\pi+2k\pi$

$\frac{\pi t}{4}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$ $t=\frac{8}{3}+8k$ **Ответ:** $t=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

116.а) $x^7=3$, $x\in(-\infty;\ \infty)$ **Ответ:** $x=\sqrt[7]{3}$.

б) $\frac{3}{x-1}=-5$, $x\in(-\infty;\ 1)$; $3=-5(x-1)$; $-5x=-2$; $x=0{,}4$

Ответ: $x=0{,}4$.

в) $x^6=4$, $x\in(-\infty;\ 0]$; $x=\pm\sqrt[6]{4}=\pm\sqrt[3]{2}$ **Ответ:** $x=-\sqrt[3]{2}$.

г) $\frac{5}{x+2}=2$, $x\in(-2;\ \infty)$; $2x=1$; $x=0{,}5$ **Ответ:** $x=0{,}5$.

117. а) $(x-3)^3=-4$, $x\in(-\infty;\ \infty)$; $x-3=-\sqrt[3]{4}$; $x=3-\sqrt[3]{4}$

Ответ: $x=3-\sqrt[3]{4}$.

б) $2\sin x=1{,}5$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin x=\frac{3}{4}$

$x=(-1)^k\arcsin\frac{3}{4}+\pi k, k\in Z$ **Ответ:** $x=\arcsin\frac{3}{4}$.

в) $(x+2)^4=5$, $x\in[-2;\ \infty)$; $x+2=\pm\sqrt[4]{5}$; $x=-2\pm\sqrt[4]{5}$;

$x=-2-\sqrt[4]{5}$ – не подходит по О.Д.З. **Ответ:** $x=-2+\sqrt[4]{5}$.

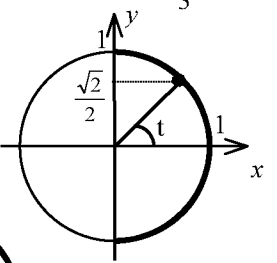
г) $0{,}5\cos x=-\frac{1}{4}$, $x\in[0;\ \pi]$; $\cos x=-\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$ **Ответ:** $x=\frac{2\pi}{3}$.

118. а) $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$

$t=\frac{\pi}{4}$

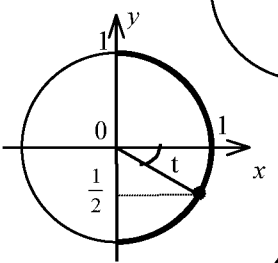
Ответ: $t=\frac{\pi}{4}$.



б) $\sin t=-\frac{1}{2}$

$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$

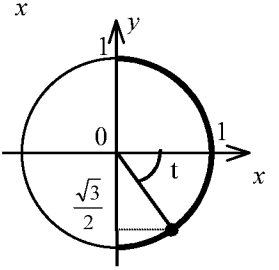
Ответ: $t=-\frac{\pi}{6}$.



в) $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$

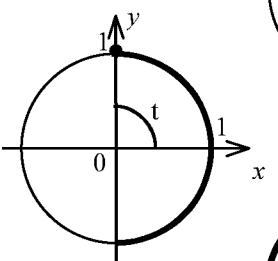
Ответ: $t=-\frac{\pi}{3}$.



г) $\sin t=1$

$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$

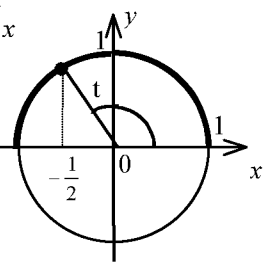
Ответ: $t=\frac{\pi}{2}$.



119. а) $\cos t=-\frac{1}{2}$

$[0;\ \pi]$

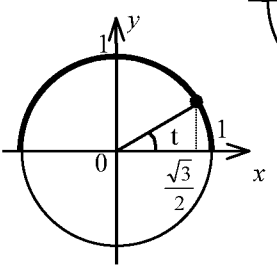
Ответ: $t=\frac{2\pi}{3}$.



б) $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$[0;\ \pi]$

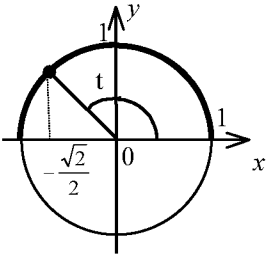
Ответ: $t=\frac{\pi}{6}$.



в) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$[0;\ \pi]$

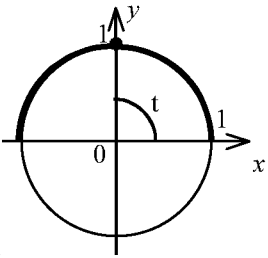
Ответ: $t = \frac{3\pi}{4}$



г) $\cos t = 0$

$[0;\ \pi]$

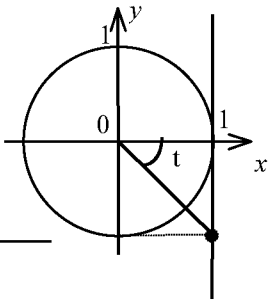
Ответ: $t = \frac{\pi}{2}$.



120. а) $\operatorname{tg} t = -1$

$\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$

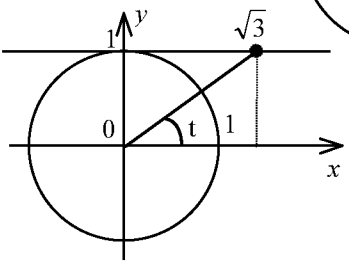
Ответ: $t = -\frac{\pi}{4}$.



б) $\operatorname{ctg} t = \sqrt{3}$

$(0;\ \pi)$

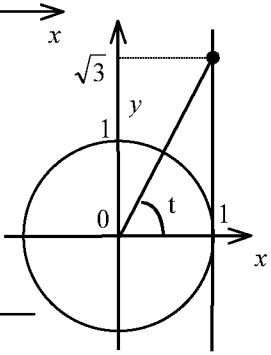
Ответ: $t = \frac{\pi}{6}$.



в) $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$

$\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$

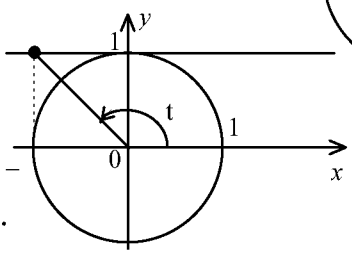
Ответ: $t = \frac{\pi}{3}$.



г) $\operatorname{ctg} t = -1$

$(0;\ \pi)$

Ответ: $t = \frac{3\pi}{4}$.



121. а) $\arcsin 0 = 0$ **б)** $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ **в)** $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ **Ответ:** 0; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{4}$.

122. а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ **б)** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ **г)** $\arccos 1 = 0$ **Ответ:** $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; 0.

123. а) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$ **б)** $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$

в) $\operatorname{arctg}0=0$ **г)** $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ **Ответ:** $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{\pi}{3}$

124. а) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ **Ответ:** имеет смысл.

б) $\arccos\sqrt{5}$, $\sqrt{5}>1$ **Ответ:** не имеет смысла.

в) $\arcsin 1{,}5$, $1{,}5>1$ **Ответ:** не имеет смысла.

г) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ **Ответ:** имеет смысл.

125. а) $\arccos\pi$ $\pi>1$ **Ответ:** смысла нет.

б) $\arcsin\left(3-\sqrt{20}\right)$ $3-\sqrt{20}<-1$ **Ответ:** смысла нет.

в) $\arccos\left(-\sqrt{3}\right)$ $-\sqrt{3}<-1$ **Ответ:** смысла нет.

г) $\arcsin\frac{2}{7}$ **Ответ:** имеет смысл.

126. а) $\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}$

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}$

в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

г) $\arcsin(-1)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3}$.

127. а) $\arccos(-0{,}5)+\arcsin(-0{,}5)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin(-1)=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=1\frac{1}{4}\pi$

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$

г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$; $1\frac{1}{4}\pi$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{12}$.

128. а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$

б) $\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

в) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\operatorname{arctg}0=-\frac{\pi}{3}+0=-\frac{\pi}{3}$

г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ **Ответ:** $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$.

129. а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ т.к. $-\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}$ **Ответ:** первое меньше

б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) > \operatorname{arctg}(-1)$ т.к. $\frac{2\pi}{3} > -\frac{\pi}{4}$ **Ответ:** первое больше.

в) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} < \arcsin 1$ т.к. $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ **Ответ:** первое меньше.

г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > \arcsin\frac{1}{2}$ т.к. $\frac{5\pi}{6} > \frac{\pi}{6}$ **Ответ:** первое больше.

130. а) $\arcsin 0{,}3010 \approx \mathbf{0{,}3057}$ $\operatorname{arctg} 2{,}3 \approx \mathbf{1{,}7}$

б) $\arccos 0{,}6081 \approx \mathbf{0{,}9171}$ $\operatorname{arctg} 0{,}3541 \approx \mathbf{0{,}3403}$

в) $\arcsin 0{,}7801 \approx \mathbf{0{,}8948}$ $\arccos 0{,}8771 \approx \mathbf{0{,}5010}$

г) $\operatorname{arctg} 10 \approx \mathbf{1{,}5}$ $\arcsin 0{,}4303 \approx \mathbf{0{,}4448}$

131.а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3}$

б) $3\arcsin\frac{1}{2} + 4\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} + 3\pi + \frac{\pi}{3} = 3\frac{5}{6}\pi$

в) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1 = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \pi$

г) $\arcsin(-1) - \frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2} + 3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3}$; $-3\frac{5}{6}\pi$; π; $-\frac{3\pi}{2}$.

132. а) $x_1, x_2 \in [-1;\ 1]$, $x_1 < x_2$ Пусть $\alpha = \arcsin x_1$, $\beta = \arcsin x_2$.

Предположим, что $\alpha \ge \beta$. $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ – $y = \sin x$ возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\sin\alpha \ge \sin\beta$, то есть $x_1 \ge x_2$, что противоречит условию.

Отсюда, $\alpha < \beta$. Следовательно, $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$.

б) $x_1, x_2 \in [-1;\ 1]$, $x_1 < x_2$ Пусть $\alpha = \arccos x_1$, $\beta = \arccos x_2$.

Предположим, что $\alpha \le \beta$. $\alpha, \beta \in [0;\ \pi]$ – $y = \cos x$ убывает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\cos\alpha \ge \cos\beta$, то есть $x_1 \ge x_2$, что противоречит условию.

Отсюда, $\alpha > \beta$. Следовательно, $\arccos x_1 > \arccos x_2$.

133. $x_1, x_2 \in R$, $x_1 < x_2$ **а)** Пусть $\alpha = \operatorname{arctg} x_1$, $\beta = \operatorname{arctg} x_2$.

Предположим, что $\alpha \ge \beta$. $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ – $y = \operatorname{tg} x$ возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\operatorname{tg}\alpha \ge \operatorname{tg}\beta$, то есть $x_1 \ge x_2$, что противоречит условию.

Отсюда, $\alpha < \beta$. Следовательно, $\operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2$.

б) Пусть $\alpha = \operatorname{arcctg} x_1$, $\beta = \operatorname{arcctg} x_2$. Предположим, что $\alpha \le \beta$.

$\alpha, \beta \in (0;\ \pi)$ – $y = \operatorname{ctg} x$ убывает $\Rightarrow$ $\operatorname{ctg}\alpha \ge \operatorname{ctg}\beta$, то есть $x_1 \ge x_2$,

что противоречит условию. Отсюда, $\alpha > \beta$.

Следовательно, $\operatorname{arcctg} x_1 > \operatorname{arcctg} x_2$.

134. а) $\arcsin(-0{,}3)$; $\arcsin\frac{\pi}{6}$; $\arcsin 0{,}9$

б) $\arcsin(-0{,}7)$; $\arcsin(-0{,}5)$; $\arcsin\frac{\pi}{8}$

в) $\arccos 0{,}4$; $\arccos(-0{,}2)$; $\arccos(-0{,}8)$

г) $\arccos 0{,}9$; $\arccos\frac{\pi}{5}$; $\arccos(-0{,}6)$.

135. а) $\operatorname{arctg}(-5)$; $\operatorname{arctg} 0{,}7$; $\operatorname{arctg} 100$ **б)** $\operatorname{arcctg}\pi$; $\operatorname{arcctg} 1{,}2$; $\operatorname{arcctg}(-5)$

в) $\operatorname{arctg}(-9{,}5)$; $\operatorname{arctg} 3{,}4$; $\operatorname{arctg} 17$ **г)** $\operatorname{arcctg} 1{,}4$; $\operatorname{arcctg}(-2{,}5)$; $\operatorname{arcctg}(-7)$

§3 п.9

136. а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$.

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2k\pi$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$.

г) $\cos x = -1$; $x = \arccos(-1) + 2k\pi$; $x = \pi + 2k\pi$

Ответ: $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$.

137. а) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi$;

$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ **Ответ:** $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$.

б) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$; $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi$;

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **Ответ:** $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$.

в) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$; $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi$

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ **Ответ:** $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$.

г) $2\cos x - 1 = 0$; $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

138. а) $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{2} + k\pi$; $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$.

б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$, $k \in Z$

$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi$ **Ответ:** $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

в) $\sin x = -\frac{1}{2}$; $x = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin\frac{1}{2} + k\pi$, $k \in Z$

$x = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^{k+1} + k\pi$ **Ответ:** $x = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^{k+1} + k\pi$, $k \in Z$.

г) $\sin x = -1$ **Ответ:** $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

139.а) $\sqrt{2} \cdot \sin x + 1 = 0; \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; x = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi, k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} \cdot (-1)^{k+1} + k\pi$, $k \in Z$.

б) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$; $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} \cdot (-1)^{k+1} + k\pi$, $k \in Z$.

в) $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^{k} \cdot \arcsin\frac{1}{2} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^{k} + k\pi$, $k \in Z$.

г) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$; $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^{k+1} \cdot \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} \cdot (-1)^{k+1} + k\pi$, $k \in Z$.

140. а) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$.

б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$.

в) $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \operatorname{arctg} 1 + k\pi$, $k \in Z$ **Ответ:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

г) $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \operatorname{arctg} 0 + k\pi$, $k \in Z$ **Ответ:** $x = k\pi$, $k \in Z$.

141. а) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$; $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; $x = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

б) $\operatorname{ctg} x + 1 = 0$; $\operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1$; $x = -\operatorname{arctg} 1 + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

в) $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x - 1 = 0$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$.

г) $\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg} x - 1 = 0$; $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; $x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

142. а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $2x = \frac{\pi}{4} \cdot (-1)^{k} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} \cdot (-1)^{k} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

б) $\cos\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$; $\frac{x}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$ **Ответ:** $x=\pm2\pi+6k\pi$, $k\in Z$

в) $\sin\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$; $\frac{x}{4}=\frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k+k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=\frac{2\pi}{3}\cdot(-1)^k+4k\pi$, $k\in Z$.

г) $\cos4x=0$; $4x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ **Ответ:** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in Z$.

143. а) $\sin x=-0{,}6$ **Ответ:** $x=(-1)^{k+1}\cdot\arcsin0{,}6+k\pi$, $k\in Z$.

б) $\operatorname{ctg}x=2{,}5$ **Ответ:** $x=arctg2{,}5+k\pi, k\in Z.$

в) $\cos x=0{,}3$ **Ответ:** $x=\pm\arccos0{,}3+2k\pi$, $k\in Z$.

г) $\operatorname{tg}x=-3{,}5$ **Ответ:** $x=-\operatorname{arctg}3{,}5+k\pi$, $k\in Z$.

144. а) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{x}{3}=\frac{\pi}{4}\cdot(-1)^k+k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=\frac{3\pi}{4}\cdot(-1)^{k+1}-3k\pi$, $k\in Z$.

б) $\operatorname{tg}(-4x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ О.Д.З.: $x\neq\frac{k\pi}{4}$ $-4x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{24}-\frac{k\pi}{4}$, $k\in Z$.

в) $\cos(-2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-2x=\pm\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=\pm\frac{5\pi}{12}-k\pi$, $k\in Z$.

г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right)=1$ О.Д.З.: $x\neq-2k\pi$ $-\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}-2k\pi$, $k\in Z$.

145.а) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$; $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$ **Ответ:** $x=\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}+4k\pi$, $k\in Z$.

б) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\cdot(-1)^{k+1}+k\pi$, $k\in Z$; $3x=\frac{\pi}{4}\cdot\left(1+(-1)^{k+1}\right)+k\pi$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}\cdot\left(1+(-1)^{k+1}\right)+\frac{k\pi}{3}$, $k\in Z$.

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=3$ О.Д.З: $x\neq\frac{\pi}{2}+3k\pi$, $k\in Z$

$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$; $\frac{x}{3}=-\frac{\pi}{6}+k\pi$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+3k\pi$, $k\in Z$.

г) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$; $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-1$; $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$.

$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **Ответ:** $x=-\frac{2\pi}{3}+4k\pi$, $k\in Z$.

146. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-1$; $\frac{\pi}{6}-2x=\pi+2k\pi$, $k\in Z$; $-2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$, $k\in Z$.

б) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}$; $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}=\frac{\pi}{3}\cdot(-1)^k+k\pi, k\in Z$

$-\frac{x}{4}=\frac{\pi}{3}\left((-1)^k-1\right)+k\pi$ **Ответ:** $x=-\frac{4\pi}{3}\left((-1)^k-1\right)+4k\pi$, $k\in Z$.

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-1$ О.Д.З.: $x\neq-\frac{\pi}{2}-2k\pi$, $k\in Z$

$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$; $-\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ **Ответ:** $x=\pi-2k\pi, k\in Z$.

г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$; $\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4}-3x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$; $-3x=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{12}-\frac{2k\pi}{3}$, $k\in Z$.

147. а) $\sin 3x\cdot\cos x-\cos 3x\cdot\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x=\frac{\pi}{3}\cdot(-1)^k+k\pi$, $k\in Z$ **Ответ:** $x=-\frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

б) $\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}=1$; $-\cos\frac{x}{2}=1$; $\cos\frac{x}{2}=-1$; $\frac{x}{2}=\pi+2k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=2\pi+4k\pi$, $k\in Z$.

в) $\sin 2x\cdot\cos 2x=-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}\sin 4x=-\frac{1}{4}$; $\sin 4x=-\frac{1}{2}$

$4x=\frac{\pi}{6}\cdot(-1)^{k+1}+k\pi$, $k\in Z$ **Ответ:** $x=\frac{\pi}{24}\cdot(-1)^{k+1}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in Z$.

г) $\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{x}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{x}{3}-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}\cdot(-1)^k+k\pi$, $k\in Z$; $\frac{x}{3}=\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\cdot(-1)^k+k\pi$

Ответ: $x=\frac{3\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}\cdot(-1)^k+3k\pi$, $k\in Z$.

148.1) $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ **а)** $x=4{,}5\pi$, $y=2\cos\left(9\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-1$

б) $y=-1$; $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$; $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z; 2x=\frac{\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi; x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in Z$

в) $y=1$; $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$; $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$;

$2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$; $2x=\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$.

г) $y=0$; $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$; $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$; $2x=\frac{5\pi}{6}+k\pi$; $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

Ответ: а) $(4{,}5\pi;\ -1)$; **б)** $\left(\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+k\pi;\ -1\right)$;

в) $\left(\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+k\pi;\ 1\right)$; **г)** $\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2};\ 0\right)$.

2) $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ **а)** $x=4{,}5\pi$, $y=\sin\left(2\frac{1}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=1$

б) $y=-1$; $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-1$; $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$

$\frac{x}{2}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$; $x=-\frac{3\pi}{2}+4k\pi$, $k\in Z$.

в) $y=1$; $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1$; $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $x=\frac{\pi}{2}+4k\pi$, $k\in Z$.

г) $y=0$; $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$; $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi$, $k\in Z$

$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$. **Ответ: а)** $(4{,}5\pi;\ 1)$;

б) $\left(-\frac{3\pi}{2}+4k\pi;\ -1\right)$; **в)** $\left(\frac{\pi}{2}+4k\pi;\ 1\right)$; **г)** $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ 0\right)$.

149. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3}-2x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$

$-2x=-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $x=\frac{\pi}{6}\mp\frac{\pi}{6}-k\pi, k\in Z$

а) наименьший положительный корень: $x=\frac{\pi}{3}$

б) $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ $x_1=\frac{4\pi}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{3}$; $x_3=0$

в) наибольший отрицательный корень $x=-\frac{2\pi}{3}$

г) $x\in\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$ $x_1=-\frac{2\pi}{3}$; $x_2=\frac{\pi}{3}$; $x_3=0$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}$; **б)** $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; 0; **в)** $-\frac{2\pi}{3}$; **г)** $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; 0.

2) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$; $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$

$2x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in Z$; $x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi, k\in Z$

а) наименьший положительный корень: $x=\frac{5\pi}{8}$

б) $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$; $x_1 = \frac{5\pi}{8}$; $x_2 = -\frac{3\pi}{8}$

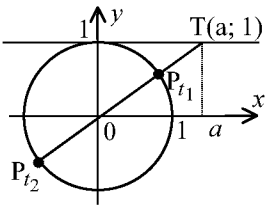
в) наибольший отрицательный корень: $x = -\frac{3\pi}{8}$

г) $x \in \left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad x_1 = -\frac{3\pi}{8}$

Ответ: а) $\frac{5\pi}{8}$; **б)** $\frac{5\pi}{8}$; $-\frac{3\pi}{8}$; **в)** $-\frac{3\pi}{8}$; **г)** $-\frac{3\pi}{8}$.

150. Доказать: для $\operatorname{ctg} t = a$ все $t = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$

Доказательство: При любом a на интервале $(0;\ \pi)$ ровно одно такое число t, что $\operatorname{ctg} t = a$ – это $\operatorname{arcctg} a$.



Поэтому $\operatorname{ctg} t = a$ имеет на $(0;\ \pi)$ длиной π единственный корень.

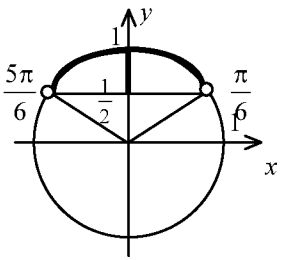
Период $\operatorname{ctg} t$ равен π. Следовательно, остальные корни отличаются от найденного на πn, $n \in Z$.

То есть $t = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

§3. п.10

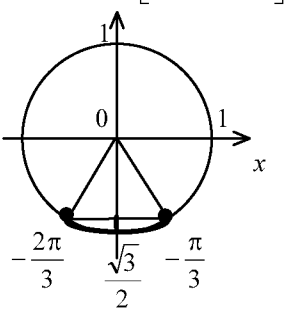
151.а) $\sin t > \frac{1}{2}$, $t \in [0;\ \pi]$

Ответ: $t \in \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$



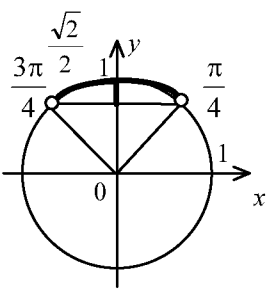
б) $\sin t \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad t \in [-\pi;\ 0]$

Ответ: $t \in \left[-\frac{2\pi}{3};\ -\frac{\pi}{3}\right]$



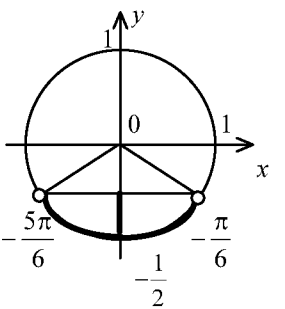
в) $\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad t \in [0;\ \pi]$

Ответ: $t \in \left(\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right)$.



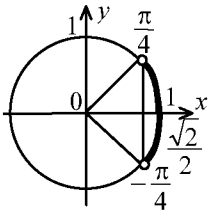
г) $\sin t < -\frac{1}{2}$ $\quad t \in [-\pi;\ 0]$

Ответ: $t \in \left(-\frac{5\pi}{6};\ -\frac{\pi}{6}\right)$.



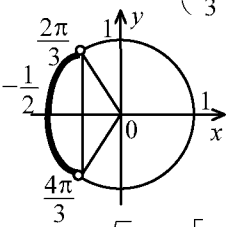
152. а) $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad t \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$

Ответ: $t \in \left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$.



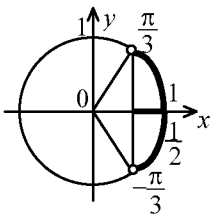
б) $\cos t < -\frac{1}{2}$ $\quad t \in \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: $t \in \left(\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}\right)$.



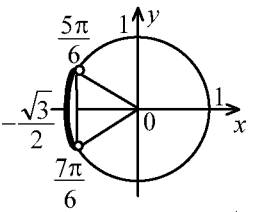
в) $\cos t > \frac{1}{2}$ $\quad t \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$

Ответ: $t \in \left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)$



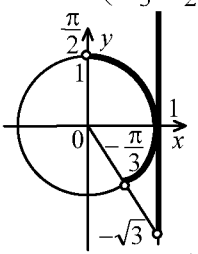
г) $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad t \in \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: $t \in \left(\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}\right)$.



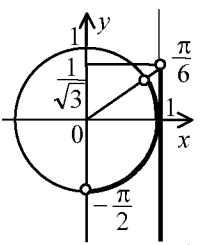
153. а) $\operatorname{tg} t > -\sqrt{3}$ $\quad t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$

Ответ: $t \in \left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$.



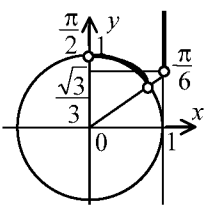
б) $\operatorname{tg} t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$

Ответ: $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}\right)$



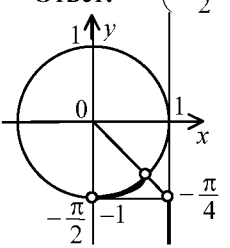
в) $\operatorname{tg} t > \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$

Ответ: $t \in \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right)$

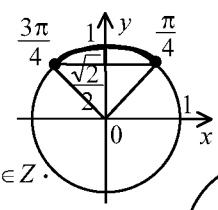


г) $\operatorname{tg} t < -1$ $\quad t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$

Ответ: $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right)$.



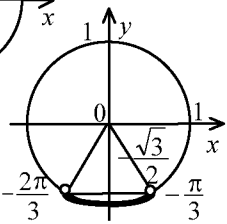
154. а) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

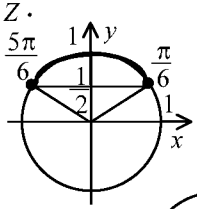
б) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$

Ответ: $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

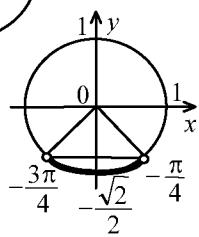
в) $\sin x \geq \frac{1}{2}$,



$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

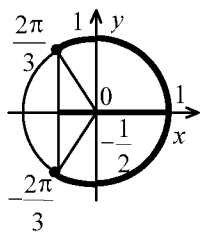
г) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$

Ответ: $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

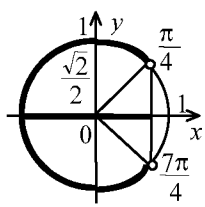
155. а) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$,



$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$

Ответ: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

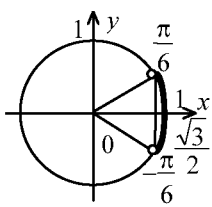
б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

в) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$



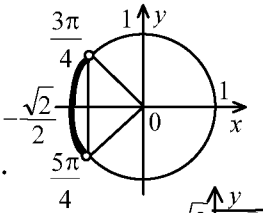
$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$

Ответ: $t \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

г) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$

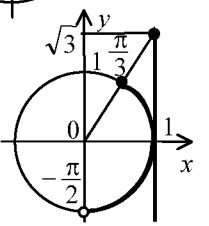
Ответ: $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.



156. а) $\operatorname{tg} x \le \sqrt{3}$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$

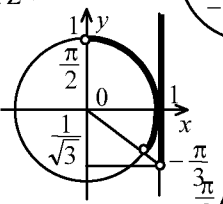
Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.



б) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$

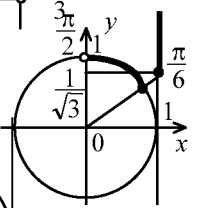
Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.



в) $\operatorname{tg} x \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{\pi}{6} + \pi k \le x < \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z.$

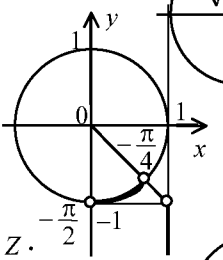
Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.



г) $\operatorname{tg} x < -1$

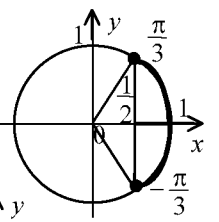
$-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$.



157. а) $2\cos x - 1 \ge 0$, $\cos x \ge \frac{1}{2}$

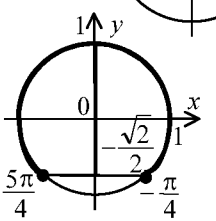
Ответ: $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.



б) $2\sin x + \sqrt{2} \ge 0$

$\sin x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$

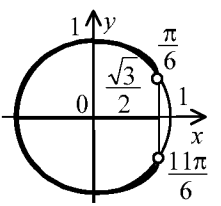
Ответ: $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.



в) $2\cos x - \sqrt{3} \le 0$

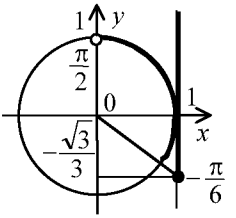
$\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.



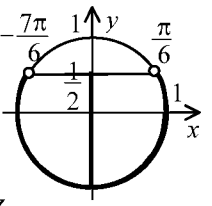
г) $3\operatorname{tg}x+\sqrt{3}\ge 0$

$\operatorname{tg}x\ge -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



Ответ: $\left[-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

158. а) $\sin 2x<\dfrac{1}{2}$

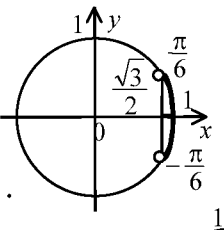


$-\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k<2x<\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$

$-\dfrac{7\pi}{12}+\pi k<x<\dfrac{\pi}{12}+\pi k$

Ответ: $\left(-\dfrac{7\pi}{12}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{12}+\pi k\right)$, $k\in Z$.

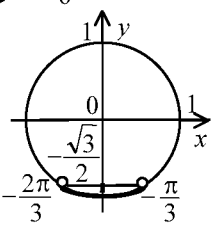
б) $\cos\dfrac{x}{3}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k<\dfrac{x}{3}<\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{2}+6\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+6\pi k\right)$, $k\in Z$.

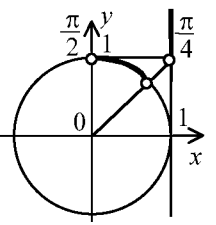
в) $\sin\dfrac{x}{2}<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k<\dfrac{x}{2}<-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$

Ответ: $\left(-\dfrac{4\pi}{3}+4\pi k;\ -\dfrac{2\pi}{3}+4\pi k\right)$, $k\in Z$.

г) $\operatorname{tg}5x>1$

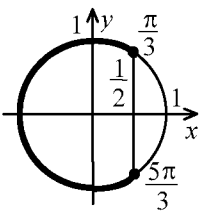


$\dfrac{\pi}{4}+2\pi k<5x<\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{2\pi k}{5};\ \dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi k}{5}\right)$, $k\in Z$.

159. а) $2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\le 1\quad \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\le\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k$

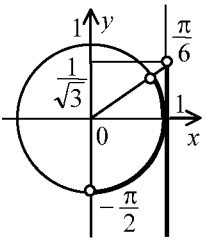


$2\pi k\le 2x\le\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k$

$\pi k\le x\le\dfrac{2\pi}{3}+\pi k$

Ответ: $\left[\pi k;\dfrac{2\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in Z$.

б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)<1 \quad \mathrm{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{\sqrt{3}}$

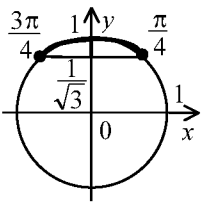


$-\frac{\pi}{2}+\pi k<3x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}+\pi k$

$-\frac{2\pi}{3}+\pi k<3x<\pi k$; $-\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}<x<\frac{\pi k}{3}$

Ответ: $\left(-\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi k}{3};\frac{\pi k}{3}\right)$, $k\in Z$.

в) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\ge 1$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$

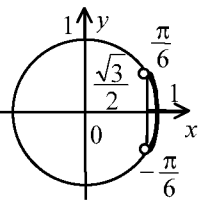


$\frac{\pi}{4}+2\pi k\le\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\le\frac{3\pi}{4}+2\pi k$

$2\pi k\le\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{2}+2\pi k$

Ответ: $(4k\pi;\ \pi+4k\pi)$, $k\in Z$.

г) $2\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)>\sqrt{3} \qquad \cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}$

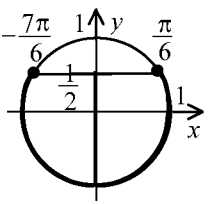


$-\frac{\pi}{6}+2\pi k<4x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}+2\pi k$

$2\pi k<4x<\frac{\pi}{3}+2\pi k$

Ответ: $\left(\frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k\in Z$.

160. а) $\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{6}\le\frac{1}{2}$

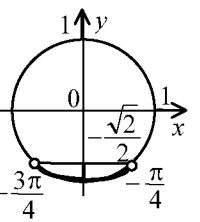


$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le\frac{1}{2}$; $-\frac{7\pi}{6}+2\pi k\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{6}+2\pi k$

$-\pi+2\pi k\le x\le 2\pi k+\frac{\pi}{3}$

Ответ: $\left[-\pi+2\pi k;2\pi k+\frac{\pi}{3}\right]$, $k\in Z$.

б) $\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$

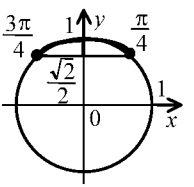


$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k<x+\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{4}+2\pi k$

$-\pi+2\pi k<x<-\frac{\pi}{2}+2\pi k$

Ответ: $t\in\left(-\pi+2k\pi;\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in Z$.

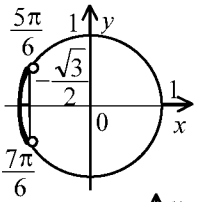
в) $4\sin 2x\cdot\cos 2x\ge\sqrt{2} \qquad \sin 4x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\frac{\pi}{4}+2\pi k\le 4x\le\frac{3\pi}{4}+2\pi k$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2};\ \frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right]$, $k\in Z$.

г) $\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos x-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{8}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

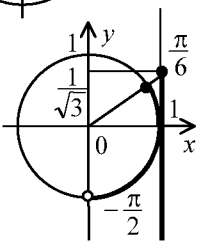


$\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x+\frac{\pi}{8}<\frac{7\pi}{6}+2\pi k$

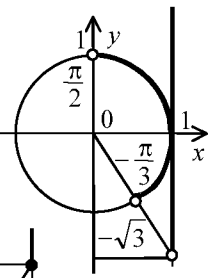
Ответ: $\left(\frac{17\pi}{24}+2\pi k;\ \frac{25\pi}{24}+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

161. а) $\operatorname{ctg}x\ge\sqrt{3}$; $\operatorname{tg}x\le\frac{1}{\sqrt{3}}$



Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k\in Z$.

б) $\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)>1$; $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{1}{\sqrt{3}}$

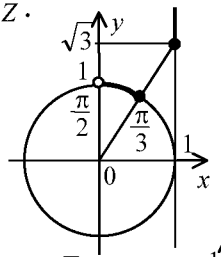


$\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>-\sqrt{3}$; $-\frac{\pi}{3}+\pi k<2x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\pi k$

$-\frac{\pi}{12}+\pi k<2x<\frac{3\pi}{4}+\pi k$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2};\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k\in Z$.

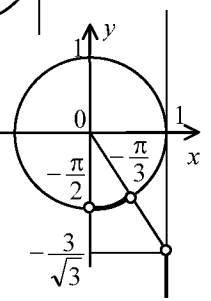
в) $\operatorname{ctg}3x\le\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg}3x\ge\sqrt{3}$



$\frac{\pi}{3}+\pi k\le 3x<\frac{\pi}{2}+\pi k$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)$, $k\in Z$.

г) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)>-\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)>-\frac{\sqrt{3}}{3}$

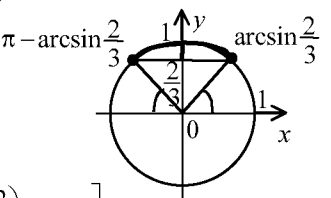


$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)<-\frac{3}{\sqrt{3}}$; $-\frac{\pi}{2}+\pi k<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}<-\frac{\pi}{3}+\pi k$

$-\frac{2\pi}{3}+\pi k<\frac{x}{2}<-\frac{\pi}{2}+\pi k$

Ответ: $\left(-\frac{4\pi}{3}+2k\pi;-\pi+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k\in Z$.

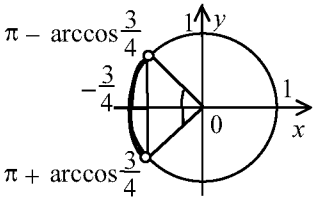
162. а) $3\sin\frac{x}{4}\ge 2$ $\quad\sin\frac{x}{4}\ge\frac{2}{3}$



$\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k\le\frac{x}{4}\le\pi-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k$

Ответ: $\left[4\arcsin\frac{2}{3}+8\pi k;\ 4\left(\pi-\arcsin\frac{2}{3}\right)+8\pi k\right]$, $k\in Z$.

б) $4\cos\frac{x}{3} < -3$

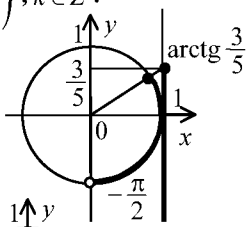


$\cos\frac{x}{3} < -\frac{3}{4}$

$\pi - \arccos\frac{3}{4} + 2\pi k < \frac{x}{3} < \pi + \arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$

Ответ: $\left(3\left(\pi - \arccos\frac{3}{4}\right) + 6k\pi; 3\left(\pi + \arccos\frac{3}{4}\right) + 6k\pi\right)$, $k \in Z$.

в) $5\operatorname{tg} 2x \le 3$; $\operatorname{tg} 2x \le \frac{3}{5}$

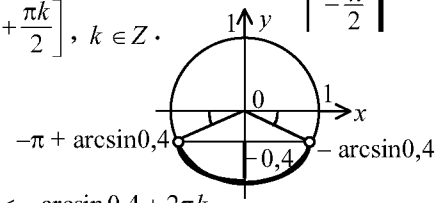


$-\frac{\pi}{2} + \pi k < 2x \le \operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \pi k$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \frac{\pi k}{2}\right]$, $k \in Z$.

г) $0{,}5\sin 4x < -0{,}2$

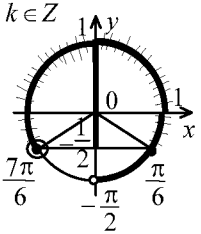
$\sin 4x < -0{,}4$



$-\pi + \arcsin 0{,}4 + 2\pi k < 4x < -\arcsin 0{,}4 + 2\pi k$

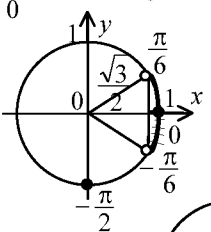
Ответ: $\left(\frac{1}{4}(-\pi + \arcsin 0{,}4) + \frac{k\pi}{2}; -\frac{1}{4}\arcsin 0{,}4 + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in Z$

163. а) $\sin x \ge -\frac{1}{2}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right)$



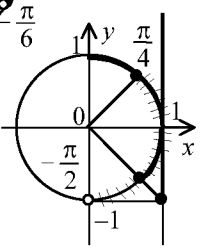
$-\frac{\pi}{6} \le x < \frac{7\pi}{6}$ **Ответ:** $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$.

б) $\cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; $-\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} \le 0$



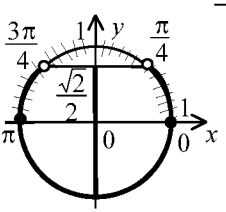
$-\frac{\pi}{3} < x \le 0$ **Ответ:** $\left(-\frac{\pi}{3}; 0\right]$.

в) $\operatorname{tg} x \ge -1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$



$-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ **Ответ:** $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

г) $\sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0; \pi]$



$0 \le 2x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} < 2x < 2\pi$

Ответ: $\left[0; \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8}; \pi\right]$.

§3 п.11

164. а) $2\sin^2 x+\sin x-1=0$ О.Д.З.: $x\in R$ $t=\sin x$

$2t^2+t-1=0$; $t_{1,2}=\dfrac{-1\pm 3}{4}$; $t_1=\dfrac{1}{2}$; $t_2=-1$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ $x=\dfrac{\pi}{6}\cdot(-1)^k+k\pi$, $k\in Z$

$\sin x=-1$ $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{6}\cdot(-1)^k+k\pi$; $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$.

б) $3\sin^2 x-5\sin x-2=0$ О.Д.З.: $x\in R$ $t=\sin x$

$3t^2-5t-2=0$; $t_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{49}}{6}=\dfrac{5\pm 7}{6}$; $t_1=2$; $t_2=-\dfrac{1}{3}$

$\sin x=2>1$ решений нет $\sin x=-\dfrac{1}{3}$ $x=(-1)^{k+1}\cdot\arcsin\dfrac{1}{3}+k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=(-1)^{k+1}\cdot\arcsin\dfrac{1}{3}+k\pi$, $k\in Z$.

в) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$ О.Д.З.: $x\in R$ $t=\sin x$

$t_{1,2}=\dfrac{1\pm 3}{4}$; $t_1=1$, $t_2=-\dfrac{1}{2}$; $\sin x=1$ $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$

$\sin x=-\dfrac{1}{2}$ $x=\dfrac{\pi}{6}\cdot(-1)^{k+1}+k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=\dfrac{\pi}{6}\cdot(-1)^{k+1}+k\pi$, $k\in Z$.

г) $4\sin^2 x+11\sin x-3=0$ О.Д.З.: $x\in R$ $t=\sin x$

$4t^2+11t-3=0$; $t_{1,2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{169}}{8}=\dfrac{-11\pm 13}{8}$; $t_1=-3$; $t_2=\dfrac{1}{4}$

$\sin x=-3<-1$ – решений нет

$\sin x=\dfrac{1}{4}$ $x=(-1)^k\cdot\arcsin\dfrac{1}{4}+k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=(-1)^k\cdot\arcsin\dfrac{1}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

165. а) $6\cos^2 x+\cos x-1=0$ О.Д.З.: $x\in R$ $t=\cos x$

$6t^2+t-1=0$; $t_{1,2}=\dfrac{-1\pm 5}{12}$; $t_1=-\dfrac{1}{2}$; $t_2=\dfrac{1}{3}$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$

$\cos x=\dfrac{1}{3}$ $x=\pm\arccos\dfrac{1}{3}+2k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x=\pm\arccos\dfrac{1}{3}+2k\pi$, $k\in Z$.

б) $2\sin^2 x+3\cos x=0$ О.Д.З.: $x\in R$ $t=\cos x$

$2\cdot(1-\cos^2 x)+3\cos x=0;\ 2\cos^2 x-3\cos x-2=0;\ 2t^2-3t-2=0$

$t_{1,2}=\dfrac{3\pm 5}{4}$; $t_1=2$, $t_2=-\dfrac{1}{2}$ $\cos x=2>1$ – решений нет

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$ **Ответ:** $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$

в) $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$; О.Д.З.: $x \in R$; $t = \cos x$; $4t^2 - 8t + 3 = 0$; $t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{4}$

$t_1 = 1{,}5$; $t_2 = \frac{1}{2}$ $\quad 4t^2 - 8t + 3 = 0$ $\quad \cos x = 1{,}5 > 1$ – решений нет

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$ $\quad$ **Ответ:** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

г) $5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0$ $\quad$ О.Д.З.: $x \in R$

$5 - 5\cos^2 x + 6\cos x - 6 = 0$; $5\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0$; $t = \cos x$

$5t^2 - 6t + 1 = 0$; $t_{1,2} = \frac{3 \pm 2}{5}$; $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{5}$

$\cos x = 1$ $\quad x = 2k\pi$, $k \in Z$ $\quad \cos x = \frac{1}{5}$ $\quad x = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = 2k\pi$, $x = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2k\pi$, $k \in Z$.

166. а) $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ $\quad$ О.Д.З.: $x \in R$

$2 - 2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$; $2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$; $t = \sin x$

$2t^2 - t - 3 = 0$; $t_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4}$; $t_1 = 1{,}5$; $t_2 = -1$

$\sin x = 1{,}5 > 1$ решений нет $\sin x = -1$ $\quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

б) $\cos^2 x + 3\sin x = 3$ $\quad$ О.Д.З.: $x \in R$

$1 - \sin^2 x + 3\sin x - 3 = 0$; $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$; $t = \sin x$

$t^2 - 3t + 2 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = 1$ $\quad \sin x = 2 > 1$ – решений нет

$\sin x = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$ $\quad$ **Ответ:** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$.

в) $4\cos x = 4 - \sin^2 x$ $\quad$ О.Д.З.: $x \in R$

$4\cos x = 4 - 1 + \cos^2 x$; $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$

$\cos x = 3 > 1$ – решений нет $\quad \cos x = 1$ $\quad x = 2k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = 2k\pi$, $k \in Z$.

г) $8\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$ $\quad$ О.Д.З.: $x \in R$

$8 - 8\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$; $8\cos^2 x - \cos x - 9 = 0$; $t = \cos x$

$8t^2 - t - 9 = 0$; $t_{1,2} = \frac{1 \pm 17}{16}$; $t_1 = \frac{9}{8}$; $t_2 = -1$

$\cos x = 1\frac{1}{8} > 1$ – решений нет $\quad \cos x = -1$ $\quad x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$.

167. а) $3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$ $\quad$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ $\quad t = \operatorname{tg} x$

$3t^2 + 2t - 1 = 0$; $t_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{6}$; $t_1 = -1$; $t_2 = \frac{1}{3}$;

$\operatorname{tg} x = -1$ $\quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$ $\quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$ $\quad x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

б) $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq k\pi$

$\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 1 = 0$; $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$; $t = \operatorname{tg} x$; $t^2 + t - 2 = 0$

$t_1 = -2$, $t_2 = 1$ $\operatorname{tg} x = -2$ $x = -\operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $k \in Z$

$\operatorname{tg} x = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = -\operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

в) $2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $t = \operatorname{tg} x$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$; $t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$; $t_1 = -2$, $t_2 = \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} x = -2$ $x = -\operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $k \in Z$

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = -\operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

г) $2\operatorname{ctg} x - 3\operatorname{tg} x + 5 = 0$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq k\pi$

$\frac{2}{\operatorname{tg} x} - 3\operatorname{tg} x + 5 = 0$; $3\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x - 2 = 0$; $t = \operatorname{tg} x$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{6}$; $t_1 = 2$; $t_2 = -\frac{1}{3}$ $\operatorname{tg} x = 2$ $x = \operatorname{arctg} 2 + k\pi$

$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$ $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

168. а) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$ О.Д.З.: $x \in R$

$\cos x\left(2\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$.

б) $4\cos^2 x - 3 = 0$ О.Д.З.: $x \in R$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$.

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\sqrt{3}\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right) = 0$

$\operatorname{tg} x = 0$ $x = k\pi$ $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

г) $4\sin^2 x - 1 = 0$ О.Д.З.: $x \in R$ $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^k + k\pi$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^{k+1} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^k + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^{k+1} + k\pi$, $k \in Z$.

169. а) $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 2\cos^2 x \quad | :\cos^2 x$

$3\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$ $\quad$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$

$\mathrm{tg}\, x = t$ $\quad 3t^2 + t - 2 = 0$; $t_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{6}$; $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{2}{3}$

$\mathrm{tg}\, x = -1$ $\quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ $\quad \mathrm{tg}\, x = \frac{2}{3}$ $\quad x = \mathrm{arctg}\frac{2}{3} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \mathrm{arctg}\frac{2}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

б) $2\cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0 \quad | :\cos^2 x$

$\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 2 = 0$ $\quad$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$

$\mathrm{tg}\, x = 2$ $\quad x = \mathrm{arctg}\, 2 + k\pi$ $\quad \mathrm{tg}\, x = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\, 2 + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

в) $9\sin x \cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x \quad | :\cos^2 x$

$2\,\mathrm{tg}^2 x - 9\,\mathrm{tg}\, x + 7 = 0$ $\quad$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$

$t = \mathrm{tg}\, x$ $\quad 2t^2 - 9t + 7 = 0$; $t_{1,2} = \frac{9 \pm 5}{4}$; $t_1 = 3{,}5$ $\quad t_2 = 1$

$\mathrm{tg}\, x = 3{,}5$ $\quad x = \mathrm{arctg}\, 3{,}5 + k\pi$; $\quad \mathrm{tg}\, x = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\, 3{,}5 + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

г) $2\sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x \quad | :\cos^2 x$

$2\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 1 = 0$ $\quad$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$

$t = \mathrm{tg}\, x$ $\quad 2t^2 - t - 1 = 0$; $t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$; $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$

$\mathrm{tg}\, x = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $\quad \mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{2}$ $\quad x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

170. а) $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$

$4\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$

$\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0 \quad | :\cos^2 x \quad \mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0$

$\mathrm{tg}\, x = 3$ $\quad x = \mathrm{arctg}\, 3 + k\pi$ $\quad \mathrm{tg}\, x = -1$ $\quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\, 3 + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

б) $\cos 2x = 2\cos x - 1$ О.Д.З.: $x \in R$

$2\cos^2 x - 2\cos x = 0$ $2\cos x(\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\cos x = 1$ $x = 2k\pi, k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = 2k\pi$, $k \in Z$.

в) $\sin 2x - \cos x = 0$; $\cos x(2\sin x - 1) = 0$; $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^k + k\pi, k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} \cdot (-1)^k + k\pi, k \in Z$.

г) $\sin 2x + 4\cos^2 x = 1$ $2\sin x\cos x + 4\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$ $| :\cos^2 x \neq 0$ $\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - 3 = 0$

$\mathrm{tg}\, x = 3$ $x = \mathrm{arctg}\, 3 + k\pi$; $\mathrm{tg}\, x = -1$ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\, 3 + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$.

171. а) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x$ $2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = 0$

$2\sin x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$ $\sin x = 0$ $x = k\pi$

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ $| :\cos x \neq 0$ $\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3} = 0$

$\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$ **Ответ:** $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$.

б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x = 2$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq k\pi$

$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3} = 0$ $t = \mathrm{tg}\, x$ $\sqrt{3}t^2 - 2t - \sqrt{3} = 0$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm 2}{\sqrt{3}}$; $t_1 = \sqrt{3}$, $t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\mathrm{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$.

в) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ $| :\cos x \neq 0$

$\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} = 0$ $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$ **Ответ:** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$.

г) $\mathrm{tg}\, x = 3\,\mathrm{ctg}\, x$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq k\pi$

$\mathrm{tg}\, x = \frac{3}{\mathrm{tg}\, x}$ $\mathrm{tg}^2 x = 3$ $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$ $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$.

172. а) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$

$2\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$3\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$ $| :\cos^2 x \neq 0$

$3\,\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$; $t = \mathrm{tg}\, x$; $3t^2 - 2t - 1 = 0$

$t_{1,2}=\frac{1\pm 2}{3}$; $t_1=1$, $t_2=-\frac{1}{3}$ $\quad \operatorname{tg}x=1 \quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

$\operatorname{tg}x=-\frac{1}{3} \quad x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi$, $k\in Z$.

б) $\sin^4\frac{x}{4}-\cos^4\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$ О.Д.З.: $x\in R$

$\left(\sin^2\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}\right)\left(\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$-\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \quad \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2} \quad \frac{x}{2}=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

Ответ: $x=\pm\frac{4\pi}{3}+4k\pi$, $k\in Z$.

в) $3\sin 2x+\cos 2x=2\cos^2 x$

$6\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x-2\cos^2 x=0$

$\sin^2 x-6\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=0 \quad |:\cos^2 x\neq 0$

$\operatorname{tg}^2 x-6\operatorname{tg}x+1=0$; $\operatorname{tg}x=t$; $t^2-6t+1=0$; $t_{1,2}=3\pm 2\sqrt{2}$

$\operatorname{tg}x=3+2\sqrt{2} \quad x=\operatorname{arctg}\left(3+2\sqrt{2}\right)+k\pi$

$\operatorname{tg}x=3-2\sqrt{2} \quad x=\operatorname{arctg}\left(3-2\sqrt{2}\right)+k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=\operatorname{arctg}\left(3+2\sqrt{2}\right)+k\pi$, $x=\operatorname{arctg}\left(3-2\sqrt{2}\right)+k\pi$, $k\in Z$.

г) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$ О.Д.З.: $x\in R$

$2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}=0 \quad 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-1\right)=0$

$\sin\frac{x}{2}=0 \quad x=2k\pi \quad \sin\frac{x}{2}=1 \quad x=\pi+4k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=2k\pi$, $x=\pi+4k\pi$, $k\in Z$.

173. а) $\sin 4x+\sin^2 2x=0 \quad \sin 2x\left(2\cos 2x+\sin 2x\right)=0$

$\sin 2x=0 \quad x=\frac{k\pi}{2} \quad 2\cos 2x+\sin 2x=0 \quad |:\cos 2x\neq 0$

$\operatorname{tg}2x+2=0$; $\operatorname{tg}x=-2$; $x=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$

Ответ: $x=\frac{k\pi}{2}$, $x=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

б) $\frac{3}{5\operatorname{tg}x+8}=1$ О.Д.З.: $\operatorname{tg}x\neq-\frac{8}{5}$, $3=5\operatorname{tg}x+8$;

$x\neq-\operatorname{arctg}\frac{8}{5}+k\pi$; $5\operatorname{tg}x=-5$; $\operatorname{tg}x=-1$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

в) $\frac{5}{3\sin x+4}=2$ О.Д.З.: $x\in R$ $\quad 5=6\sin x+8$;

$6\sin x=-3$; $\sin x=-\frac{1}{2}$ **Ответ:** $x=\frac{\pi}{6}\cdot(-1)^{k+1}+k\pi$, $k\in Z$.

г) $1-\sin 2x=\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2$

$1-\sin 2x=\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

$1-\sin 2x+\sin x-1=0$; $-2\sin x\cdot\cos x+\sin x=0$

$-\sin x(2\cos x-1)=0$; $\sin x=0$ $\quad x=k\pi$

$\cos x=\frac{1}{2}$ $\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$

Ответ: $x=k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$.

174. а) $\cos 5x-\cos 3x=0$; $-2\sin x\cdot\sin 4x=0$

$\sin x=0$ $\quad x=k\pi$ $\qquad \sin 4x=0$ $\quad x=\frac{k\pi}{4}$

Ответ: $x=k\pi$, $x=\frac{k\pi}{4}$, $k\in Z$.

б) $\sin 7x-\sin x=\cos 4x$; $2\sin 3x\cdot\cos 4x-\cos 4x=0$

$\cos 4x(2\sin 3x-1)=0$ $\qquad \cos 4x=0$ $\quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$

$\sin 3x=\frac{1}{2}$ $\quad x=\frac{\pi}{18}\cdot(-1)^k+\frac{k\pi}{3}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{18}\cdot(-1)^k+\frac{k\pi}{3}$, $k\in Z$.

в) $\sin 5x-\sin x=0$; $2\sin 2x\cdot\cos 3x=0$; $\sin 2x=0$, $\cos 3x=0$

Ответ: $x=\frac{k\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in Z$.

г) $\cos 3x+\cos x=4\cos 2x$; $2\cos 2x\cdot\cos x-4\cos 2x=0$;

$2\cos 2x(\cos x-2)=0$; $\cos 2x=0$, $\cos x=2>1$ – решений нет

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

175. а) $\begin{cases}x+y=\pi\\ \cos x-\cos y=1\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x=\pi-y\\ \cos(\pi-y)-\cos y=1\end{cases}$ $\quad -\cos y-\cos y=1$

$\cos y=-\frac{1}{2}$ $\quad 1)\begin{cases}y=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ $\quad 2)\begin{cases}y=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\ x=1\frac{2}{3}\pi+2k\pi\end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$; $\left(1\frac{2}{3}\pi+2k\pi;-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$.

б) $\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}\\ \cos^2 x+\sin^2 y=2\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+y\\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+y\right)+\sin^2 y=2\end{cases}$ $\quad \sin^2 y=1$

$1)\ \sin y=1$ $\quad \begin{cases}y=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=\pi+2k\pi\end{cases}$ $\quad 2)\ \sin y=-1$ $\quad \begin{cases}y=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=2k\pi\end{cases}$

Ответ: $\left(\pi+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$; $\left(2k\pi;\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$.

в) $\begin{cases} x+y=\pi \\ \sin x+\sin y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pi-y \\ \sin(\pi-y)+\sin y=1 \end{cases}$ $\sin y=\frac{1}{2}$

$\begin{cases} y=\frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k+k\pi \\ x=\pi-\frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k+k\pi \end{cases}$ **Ответ:** $\left(\pi-\frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k+k\pi;\ \frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k+k\pi\right)$

г) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ \sin^2 x-\sin^2 y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}-y \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-\sin^2 y=1 \end{cases}$ $\cos^2 y-\sin^2 y=1$

$\cos 2y=1$ $2y=2k\pi$ $\begin{cases} y=k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}-k\pi \end{cases}$ **Ответ:** $\left(\frac{\pi}{2}-k\pi;\ k\pi\right)$.

176. а) $\begin{cases} \sin x-\cos y=0 \\ \sin^2 x+\cos^2 y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x=\cos y \\ \sin^2 x+\cos^2 y=2 \end{cases}$ $\cos^2 y=1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos y=1 \\ \sin x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos y=-1 \\ \sin x=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} y=\pi+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ 2k\pi\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \pi+2k\pi\right)$.

б) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=\frac{1}{6} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}-y \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\cdot\operatorname{tg}y=\frac{1}{6} \end{cases}$ $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}y}\cdot\operatorname{tg}y=\frac{1}{6}$

$6(1-\operatorname{tg}y)\operatorname{tg}y=1+\operatorname{tg}y$; $6\operatorname{tg}y-6\operatorname{tg}^2 y-1-\operatorname{tg}y=0$;

$6\operatorname{tg}^2 y-5\operatorname{tg}y+1=0$; $t=\operatorname{tg}y$; $t_{1,2}=\frac{5\pm1}{12}$; $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=\frac{1}{3}$;

1) $\operatorname{tg}y=\frac{1}{2}$ $\begin{cases} y=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi \end{cases}$ 2) $\operatorname{tg}y=\frac{1}{3}$ $\begin{cases} y=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi\right)$.

в) $\begin{cases} \sin x+\cos y=1 \\ \sin^2 x-\cos^2 y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x+\cos y=1 \\ (\sin x+\cos y)(\sin x-\cos y)=1 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x+\cos y=1 \\ \sin x-\cos y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\sin x=2 \\ 2\cos y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x=1 \\ \cos y=0 \end{cases}$

$\sin x=1$ $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\cos y=0$ $y=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$.

г) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{6} \\ \sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+y \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\cdot\cos y=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos y+\cos\frac{\pi}{6}\sin y\right)\cos y=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\cos^2 y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y\cos y-\frac{1}{2}=0$;

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y\cdot\cos y-\frac{1}{2}\sin^2 y=0$; $\frac{1}{2}\sin y\left(\sqrt{3}\cos y-\sin y\right)=0$

$\left[\begin{array}{l} \sin y=0 \\ \sqrt{3}\cos y-\sin y=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=k\pi \\ y=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}+k\pi;\ k\pi\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{3}+k\pi\right)$.

Повторение к главе I.

1. 2) $18^\circ=\frac{18^\circ\cdot\pi}{180^\circ}=\frac{\pi}{10}$ рад; $-250^\circ=-\frac{250^\circ\cdot\pi}{180^\circ}=-\frac{25\pi}{18}$ рад;

$-360^\circ=-\frac{360^\circ\cdot\pi}{180^\circ}=-2\pi$ рад; $225^\circ=\frac{225^\circ\cdot\pi}{180^\circ}=\frac{5\pi}{4}$ рад

Ответ: $\frac{\pi}{10}$; $-\frac{25\pi}{18}$; -2π; $\frac{5\pi}{4}$.

3) $\pi=\frac{\pi\cdot180^\circ}{\pi}=180^\circ$; $-2{,}5=-\frac{2{,}5\cdot180^\circ}{\pi}=-\left(\frac{450}{\pi}\right)^{\circ}$;

$-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi\cdot180^\circ}{3\cdot\pi}=-60^\circ$; $3=\frac{3\cdot180^\circ}{\pi}=\left(\frac{540}{\pi}\right)^{\circ}$

Ответ: 180°; $-\left(\frac{450}{\pi}\right)^{\circ}$; -60°; $\left(\frac{540}{\pi}\right)^{\circ}$.

2. 2) **а)** $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

в) $\sin\frac{5\pi}{2}=1$; $\cos\frac{5\pi}{2}=0$ **г)** $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3)	**а)** $\alpha=23^\circ24'$	$\sin\alpha\approx0{,}3971$	$\cos\alpha\approx0{,}9178$
	б) $\alpha=-1{,}7$	$\sin\alpha\approx-0{,}0297$	$\cos\alpha\approx0{,}9996$
	в) $\alpha=-108^\circ6'$	$\sin\alpha\approx0{,}9509$	$\cos\alpha\approx-0{,}3107$
	г) $\alpha=0{,}8$	$\sin\alpha\approx0{,}01396$	$\cos\alpha\approx+0{,}9999$

3. 2) **а)** $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$

б) $\alpha=-\frac{13\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha=-1$; $\operatorname{ctg}\alpha=-1$

в) $\alpha=-\frac{7\pi}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{3}$ **г)** $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) а) $\alpha = 1{,}7$, $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}0297$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx 33{,}67$

б) $\alpha = -0{,}4$, $\operatorname{tg}\alpha \approx -0{,}0067$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx -142{,}86$

в) $\alpha = 2{,}3$, $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}0402$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx 24{,}88$

г) $\alpha = -0{,}5$, $\operatorname{tg}\alpha \approx -0{,}0087$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx -114{,}94$

4. 2) а) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\left(1-\cos^2\alpha\right) =$

$$= \frac{\left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right)\cdot\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha$$

б) $\frac{\cos^3\alpha + \sin^3\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{\cos\alpha} =$

$$= \frac{\cos^4\alpha + \sin^3\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^3\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^4\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \sin\alpha\cdot\cos\alpha\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = 2\operatorname{tg}2\alpha + 1$$

в) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2\alpha}} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

г) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha) = \sin^2\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) +$

$+\cos^2\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) = (\sin\alpha + \cos\alpha)\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \sin\alpha + \cos\alpha$

3) а) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

б) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$

$$\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1-\left(1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)}{\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha}} =$$

$$= \frac{-2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\left(\sin^2\alpha - 1\right)} = \frac{2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^3\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$$

в) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

г) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$$

5. 2) а) $\sin(-212°)>0$, $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{9}<0$; **б)** $\cos 305°>0$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)<0$;

в) $\cos(-105°)<0$, $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{9}>0$; **г)** $\sin(-324°)>0$, $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}>0$.

3) а) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{3}\cdot 3}{3\cdot\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{2}$

б) $\operatorname{ctg}\alpha=-3$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{3}$

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$

$=-\sqrt{1-\frac{9}{10}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

в) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ $\operatorname{ctg}\alpha=2$

$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

г) $\cos\alpha=\frac{1}{7}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4\sqrt{3}\cdot 7}{7\cdot 1}=4\sqrt{3}$ $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{12}$

6. 2) а) $\sin\left(-\frac{13\pi}{8}\right)=\sin\frac{3\pi}{8}$ **б)** $\operatorname{ctg}\frac{21\pi}{13}=-\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{13}$

в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ **г)** $\cos\frac{8\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}$

3)а) $\sin\frac{7\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{8}+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+\operatorname{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1$

б) $$\frac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot(-\operatorname{tg}\alpha)}{\cos\alpha\cdot(-\operatorname{tg}\alpha)\cdot(-\sin\alpha)}=1$$

в) $$\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}+\sin\frac{37\pi}{12}-\cos\frac{7\pi}{12}=\operatorname{ctg}\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{12}\right)-$$
$$-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=1$$

г) $$\frac{\sin(\alpha-\pi)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)}=\frac{-\sin\alpha\cdot(-\operatorname{ctg}\alpha)}{\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}=1$$

7. 2) а) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6}$$ **Ответ:** $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6}$.

б) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} +$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$; $2-\sqrt{3}$.

в) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} =$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}-1}{6}$$ **Ответ:** $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

г) $\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45°\cdot\cos 30° + \cos 45°\cdot\sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45°+30°) = \frac{\operatorname{tg}45° + \operatorname{tg}30°}{1-\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}30°} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{12+2\sqrt{3}}{6} = 2+\frac{\sqrt{3}}{3}$$ **Ответ:** $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$; $2+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3) а) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha = \sqrt{3}\cdot\sin\alpha$

б) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} =$$

$$= \frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)} = \frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)} =$$

$$= \frac{2\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)} = \frac{2\sin 2x}{\cos 2x} = 2\operatorname{tg} 2x$$

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

г) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=$
$=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$

8. 2) а) $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$; $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ $\quad\sin\alpha=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{24}{25}$ **Ответ:** $\dfrac{24}{25}$.

б) $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\cos\alpha<0$ $\quad\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=-\dfrac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{12}{5}$

$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{2\cdot\left(-\dfrac{12}{5}\right)}{1-\left(-\dfrac{12}{5}\right)^2}=\dfrac{120}{119}$ **Ответ:** $\dfrac{120}{119}$.

в) $\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$ $\quad\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{15}{17}\right)^2}=\pm\dfrac{8}{17}$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(\dfrac{8}{17}\right)^2-\left(\dfrac{15}{17}\right)^2=-\dfrac{161}{289}$ **Ответ:** $-\dfrac{161}{289}$

г) $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ $\quad\sin\alpha=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$

$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{-8\cdot 9}{3\cdot(-7)}=\dfrac{24}{7}=3\dfrac{3}{7}$ **Ответ:** $3\dfrac{3}{7}$.

3) а) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\left(2\cos^2\alpha-1\right)=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\sin 2\alpha$

б) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\dfrac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$

в) $1-(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin 2\alpha)=\sin 2\alpha$

г) $\operatorname{tg}\alpha\cdot(1+\cos 2\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\cdot 2\cos^2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha$

9. 2) а) $\cos 117^\circ+\cos 63^\circ=2\cos 90^\circ\cdot\cos 54^\circ=0$

б) $\dfrac{\sin 70^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 40^\circ}=\dfrac{2\sin 30^\circ\cdot\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ}=1$

в) $\cos\dfrac{19\pi}{12}-\cos\dfrac{\pi}{12}=-2\sin\dfrac{3\pi}{4}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{3}=-2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

г) $\sin 112^\circ+\sin 248^\circ=2\sin 180^\circ\cdot\cos 69^\circ=0$ **Ответ: 0; 1;** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$**; 0.**

3) а) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\dfrac{2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$

б) $(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)^2 + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)^2 = = \sin^2 2\alpha + \sin^2 4\alpha +$
$+ 4\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 4\alpha + 2\cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha =$
$= 2 + 2\cos 2\alpha(2\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha) = 2 + 2\cos 2\alpha = 4\cos^2 \alpha$

в) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta} = \dfrac{2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

г) $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 2\sin 3\alpha \cdot \cos\alpha + 2\sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha =$
$= 2\sin 3\alpha(\cos\alpha + \cos 3\alpha) = 4\sin 3\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha$

10. 2) а) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\dfrac{3\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \pi \Rightarrow \cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$

$2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$; $\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **Ответ:** $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

б) $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{3\pi}{4}$

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = -\dfrac{2}{3\left(1-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)} = -\dfrac{2\cdot 3}{3(3-\sqrt{5})} = -\dfrac{2(3+\sqrt{5})}{4} = -\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

в) $\sin\alpha = -\dfrac{3}{7}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{3\pi}{4}$, значит $\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{7}\right)^2} = -\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$ $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)} = \sqrt{\dfrac{7+2\sqrt{10}}{14}}$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{7+2\sqrt{10}}{14}}$.

г) $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \dfrac{3\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \pi$

$\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}$ $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{7\cdot 5}{5\cdot(-\sqrt{21})} = -\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

3) а) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin^2\alpha = 1 -$
$- \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

б) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha\cdot(1+\cos\alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$

в) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ **г)** $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$

Ответ: а) $\cos^2\alpha$; **б), в), г)** $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

11. 2) **а)** $y=\dfrac{3x+1}{x^2-7x+12}$ $\quad D(f)$: $x\neq 4$, $x\neq 3$

б) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ $\quad D(f)$: $x\neq k\pi$, $k\in Z$

в) $y=\sqrt{4-x^2}$ $\quad D(f)$: $[-2;\ 2]$

г) $y=\dfrac{1}{\cos x}$ $\quad D(f)$: $x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$

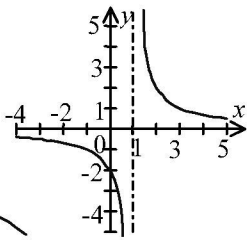
3) **а)** $y=3\cos x-1$ $\quad E(f)=[-4;\ 2]$

б) $y=\dfrac{1}{x^2}+1$ $\quad E(f)=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \infty)$

в) $y=2-\sin x$ $\quad E(f)=[1;\ 3]$

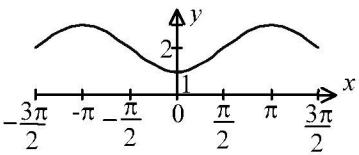
г) $y=3-x^4$ $\quad E(f)=(-\infty;\ 3]$

12. 2) **а)** $y=\dfrac{2}{x-1}$ $\quad D(f)$: $x\neq 1$



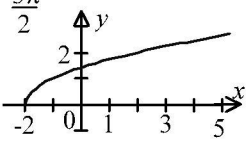
x	0	2	3	–1
y	–2	2	1	–1

б) $y=2-\cos x$

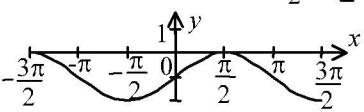


в) $y=\sqrt{x+2}$

x	–2	–1	2
y	0	1	2



г) $y=\sin x-1$



3) **а)** $f(x)=x^3-4x$ $\quad$ с OX: $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 2$, $y=0$

с OY: $y=0$, $x=0$. $\quad$ **Ответ: (0; 0); (–2; 0); (2; 0).**

б) $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$ $\quad$ с OX: $y=0$, $x=-1$

с OY – не пересекается, так как $D(f)$: $x\neq 0$ $\quad$ **Ответ: (–1; 0).**

в) $f(x)=1-x^4$ $\quad$ с OX: $y=0$, $x_{1,2}=\pm 1$; с OY: $x=0$, $y=1$

Ответ: (0; 1); (1; 0); (–1; 0).

г) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ $\quad$ с OX не пересекается; с OY: $x=0$, $y=-\dfrac{1}{3}$

Ответ: $\left(0;\ -\dfrac{1}{3}\right)$.

13. 2) **а)** $y\uparrow$ на **[–1; 3], [6; 7]**; $y\downarrow$ на **[–5; –1]; [3; 6]; [7; 8].**

б) $y\uparrow$ на **[–7; –4], [1; 4]**; $y\downarrow$ на **[–4; 1]; [4; 7].**

3) **а)** $y=1+0{,}5\cos x$; $y\uparrow$ на $[-\pi+2\pi k;\ 2k\pi]$; $y\downarrow$ на $[2\pi k;\ \pi+2k\pi]$

б) $y=-\dfrac{3}{x-1}$ $\qquad y\uparrow$ на $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \infty)$

в) $y=2x^2+4x$ $\qquad y\uparrow$ на $[-1;\ \infty)$; $\qquad y\downarrow$ на $(-\infty;\ -1]$

г) $y=1{,}5\sin(x-1)$

$y\uparrow$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$; $\ y\downarrow$ на $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$

14. 2) а) $x_{max}=3$, $x_{max}=7$, $x_{min}=-1$, $x_{min}=6$

$y(3)=6$, $y(7)=3$, $y(-1)=2$, $y(6)=-3$

б) $x_{max}=-4$, $x_{max}=4$, $x_{min}=1$, $y(-4)=3$, $y(4)=5$, $y(1)=1$

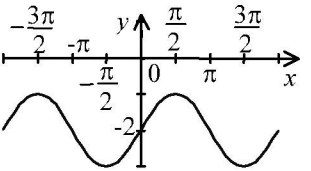
3) а) $y=(x-3)^2+2$ $\qquad x_{min}=3 \quad y(3)=2$

б) $y=\cos^2 x$; $x_{max}=k\pi$, $y(k\pi)=1$; $x_{min}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$

в) $y=1-(x+2)^2$ $\qquad x_{max}=-2$, $y(-2)=1$

г) $y=\sin^2 x$; $x_{max}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=1$; $x_{min}=k\pi$, $y(k\pi)=0$

15. а) $y=\sin x-2$



1) $D(f)=R$ $\qquad E(f)=[-3;\ -1]$

2) периодич., $T=2\pi$

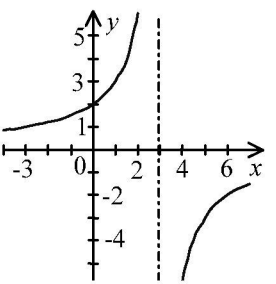
3) $y\neq 0$, $x=0$, $y=-2$, $(0;-2)$ – с OY.

4) $y<0$ на $(-\infty;\ \infty)$

5) $y\uparrow$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $\qquad y\downarrow$ на $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$

6) $x_{max}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$; $x_{min}=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=-1$; $y\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=-3$

б) $y=-\dfrac{6}{x-3}$



1) $D(f)$: $x\neq 3$ $\qquad E(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$

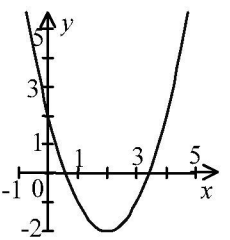
2) $y\neq 0$, $\ x=0$ $\ y=2$ $(0;2)$ – с OY.

3) $y>0$ на $(-\infty;\ 3)$; $y<0$ на $(3;\ \infty)$

4) $y\uparrow$ на $(-\infty;\ 3)\cup(3;\ \infty)$

5) точек экстремума нет.

в) $y=x^2-4x+2$



1) $D(f)=R$, $E(f)=[-2;\ \infty)$

2) с OX: $(2-\sqrt{2};0)$; $(2+\sqrt{2};0)$; с OY: **(0; 3)**

3) $y>0$ на $(-\infty;\ 2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2};\ \infty)$;

$y<0$ на $(2-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2})$

4) $y\uparrow$ на $[2;\ \infty)$; $y\downarrow$ на $(-\infty;\ 2]$.

5) $x_{min}=2$ $\qquad y(2)=-1$

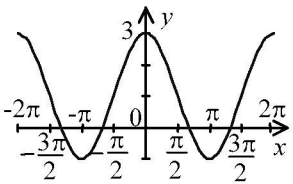
г) $y = 2\cos x + 1$

1) $D(f) = R \qquad E(f) = [-1;\ 3]$

2) периодич., $T = 2\pi$

3) $y = 0$ при $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$x = 0$ при $y = 3$



4) $y > 0$ на $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $y < 0$ на $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$.

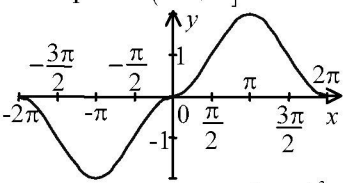
5) $y\uparrow$ на $[-\pi + 2\pi k;\ 2k\pi]$ $\quad y\downarrow$ на $[2\pi k;\ \pi + 2k\pi]$

6) $x_{\min} = -\pi + 2k\pi$, $y(-\pi + 2k\pi) = -1$; $x_{\max} = 2k\pi$, $y(2k\pi) = 3$

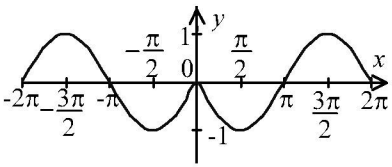
16. 2) **а)** $y = \frac{\sin x}{x}$ – чётная **б)** $y = x + x^5$ – нечётная

в) $y = x\cos x$ – нечётная **г)** $y = 3x^2 + x^6$ – чётная

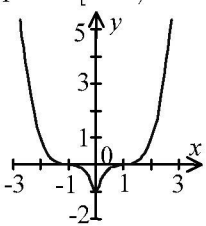
3) **а)** f – нечетная, $f(x) = \cos x - 1$ при $x \in (-\infty;\ 0]$



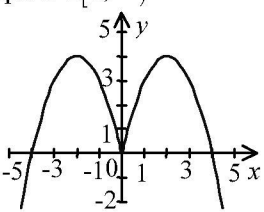
в) f – чётная; $f(x) = \sin x$ при $x \in (-\infty;\ 0]$



б) f – чётная, $f(x) = (x-1)^3$ при $x \in [0;\ \infty)$



г) f – чётная; $f(x) = 4x - x^2$ при $x \in [0;\ \infty)$



17. 2) $y = \cos x$, $T = 2\pi$; $y = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$;

$y = \sin x$, $T = 2\pi$; $y = \operatorname{ctg} x$, $T = \pi$

3) $y = \sin\frac{x}{2}$, $T = 4\pi \qquad y = \cos(4x+1)$, $T = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}$

$y = \operatorname{tg} 2x$, $T = \frac{\pi}{2} \qquad y = \cos\frac{x}{3}$, $T = 6\pi$

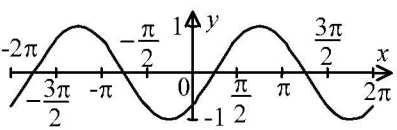
18. 2) **а)** $\sin(-1{,}2)$; $\sin 0{,}3$; $\sin 1{,}1$ **б)** $\sin 2$; $\sin 3{,}6$; $\sin 4$

в) $\sin(-0{,}9)$; $\sin 0{,}4$; $\sin 1{,}4$ **г)** $\sin 1{,}9$; $\sin 2{,}9$; $\sin 4{,}3$.

3) **а)** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

1) $D(f) = R$, $E(f) = [-1;\ 1]$

2) периодич. $T = 2\pi$



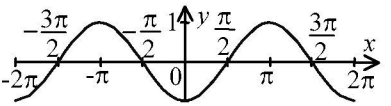
3) $x=0$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad y=0$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

4) $y>0$ на $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)$ $y<0$ на $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$

5) $y\uparrow$ на $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$ $y\downarrow$ на $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{4}+2k\pi\right]$

6) $x_{\min}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $y\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=-1$; $x_{\max}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $y\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)=1$

19. б) $y=-\cos x$



1) $D(f)=R$, $E(f)=[-1;\ 1]$

2) периодич. $T=2\pi$

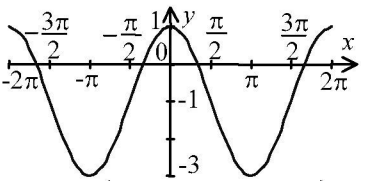
3) $x=0$, $y=-1$; $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

4) $y>0$ на $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$ $y<0$ на $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

5) $y\uparrow$ на $[2\pi k;\ \pi+2k\pi]$ $\qquad y\downarrow$ на $[-\pi+2\pi k;\ 2k\pi]$

6) $x_{\min}=2k\pi$, $y(2k\pi)=-1$; $\quad x_{\max}=-\pi+2k\pi$, $y(-\pi+2k\pi)=1$.

в) $y=2\cos x-1$



1) $D(f)=R$, $E(f)=[-3;\ 1]$

2) периодич. $T=2\pi$

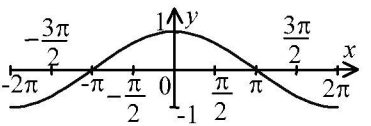
3) $x=0$, $y=1$, $y=0$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$

4) $y>0$ на $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$; $y<0$ на $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)$

5) $y\uparrow$ на $[-\pi+2\pi k;\ 2k\pi]$ $\qquad y\downarrow$ на $[2\pi k;\ \pi+2k\pi]$

6) $x_{\min}=-\pi+2k\pi$, $y(-\pi+2k\pi)=-3$; $\quad x_{\max}=2k\pi$, $y(2k\pi)=1$.

г) $y=\cos\frac{x}{2}$



1) $D(f)=R$, $E(f)=[-1;\ 1]$

2) периодич. $T=4\pi$

3) $y=0$, $x=\pi+4k\pi$ $\qquad x=0$, $y=1$

4) $y>0$ на $(-\pi+4\pi k;\ \pi+4k\pi)$; $y<0$ на $(\pi+4\pi k;\ 3\pi+4k\pi)$

5) $y\uparrow$ на $[-2\pi+4\pi k;\ 4k\pi]$; $y\downarrow$ на $[4\pi k;\ 2\pi+4k\pi]$

6) $x_{\max}=4k\pi$, $y(4k\pi)=1$; $x_{\min}=-2\pi+4k\pi$, $y(-2\pi+4k\pi)=-1$.

20. 2) а) $\operatorname{tg}(-0{,}4)$; $\operatorname{tg}0{,}8$; $\operatorname{tg}1{,}2$. $\qquad$ **б)** $\operatorname{tg}1{,}6$; $\operatorname{tg}2{,}8$; $\operatorname{tg}3{,}9$.

в) $\operatorname{tg}(-1{,}3)$; $\operatorname{tg}(-0{,}7)$; $\operatorname{tg}0{,}6$. $\qquad$ **г)** $\operatorname{tg}1{,}7$; $\operatorname{tg}2{,}5$; $\operatorname{tg}4{,}3$.

21. 3) а) $\arcsin(-1)+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$.

б) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$.

в) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$.

г) $\arcsin 0 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. **Ответ:** $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$.

22. 3) **а)** $\arccos(-1) + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

б) $\arccos\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

в) $\operatorname{arctg}(-1) - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{12}$

г) $\arccos 0 + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{12}$; $\frac{2\pi}{3}$.

23. 2) **а)** $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ О.Д.З.: $x \in R$ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$.

б) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 = 0$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$.

в) $2\sin x - \sqrt{2} = 0$ О.Д.З.: $x \in R$ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}\cdot(-1)^k + k\pi$, $k \in Z$.

г) $2\cos x - 1 = 0$ О.Д.З.: $x \in R$ $\cos x = \frac{1}{2}$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

24. 1) **а)** $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$ О.Д.З.: $x \in R$ $t = \sin x$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$; $t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$; $t_1 = -2$; $t_2 = \frac{1}{2}$

$\sin x = -2 < -1$ – решений нет $\sin x = \frac{1}{2}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k + k\pi$, $k \in Z$.

б) $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$ О.Д.З.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\operatorname{tg} x = 3$ $x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi$; $\operatorname{tg} x = 1$ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 3 + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

в) $2\cos^2 x - 5\cos x = 3$ О.Д.З.: $x \in R$ $t = \cos x$

$2t^2 - 5t - 3 = 0$; $t_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4}$; $t_1 = 3$, $t_2 = -\frac{1}{2}$

$\cos x = 3 > 1$ – решений нет $\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in Z$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

г) $2\sin^2 x + \sin x = 0$ О.Д.З.: $x \in R$

$\sin x(2\sin x + 1) = 0$ $\sin x = 0$ $\sin x = -\frac{1}{2}$

Ответ: $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{6}\cdot(-1)^{k+1} + k\pi$, $k \in Z$.

2) а) $6\sin^2 x - 2\sin 2x = 1$

$6\sin^2 x - 4\sin x\cdot\cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$5\sin^2 x - 4\sin x\cdot\cos x - \cos^2 x = 0$ $\quad | :\cos^2 x \neq 0$

$5\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 1 = 0$; $t = \operatorname{tg} x$; $5t^2 - 4t - 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{2 \pm 3}{5}$; $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{5}$; $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{5}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + k\pi$, $k \in Z$.

б) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ О.Д.З.: $x \in R$

$-\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $2x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$

Ответ: $x = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi$, $k \in Z$.

в) $4\sin x\cdot\cos x = \sqrt{3}$ О.Д.З.: $x \in R$

$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x = \frac{\pi}{3}\cdot(-1)^k + k\pi$, $k \in Z$

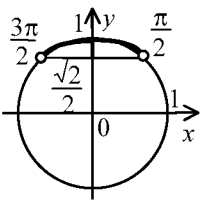
Ответ: $x = \frac{\pi}{6}\cdot(-1)^k + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

г) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$ О.Д.З.: $x \in R$

$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$; $\cos 2x = 1$; $2x = 2k\pi$

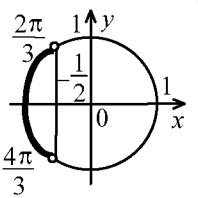
Ответ: $x = k\pi$, $k \in Z$.

25. 1) а) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$



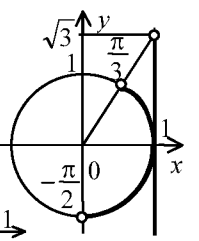
Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$

б) $2\cos x + 1 < 0$; $\cos x < -\frac{1}{2}$



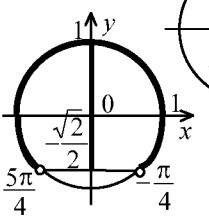
Ответ: $\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)$.

в) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$



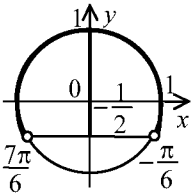
Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$.

г) $\sqrt{2}\sin x + 1 > 0$; $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in Z$.

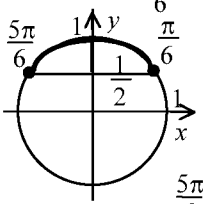
2) а) $\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} > -\frac{1}{4}$



$\frac{1}{2}\sin x > -\frac{1}{4}$; $\sin x > -\frac{1}{2}$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in Z$.

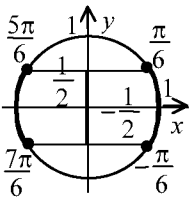
б) $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2}$



$1-\sin x \le \frac{1}{2}$ $\quad \sin x \ge \frac{1}{2}$

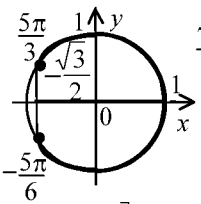
Ответ: $\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k\in Z$.

в) $2\sin^2\frac{x}{2} \le \frac{1}{2}$; $\sin^2\frac{x}{2} \le \frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2} \le \sin\frac{x}{2} \le \frac{1}{2}$



Ответ: $\left[-\frac{\pi}{3}+4k\pi;\ \frac{\pi}{3}+4k\pi\right]$;

$\left[\frac{5\pi}{3}+4k\pi;\ \frac{7\pi}{3}+4k\pi\right]$



г) $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ **Ответ:** $\left[-\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$.

177. а) $a = 15$ м, $b = 20$ м, прямоугольник; ΔP и ΔS = ?

1) $\Delta a = 0{,}11$ м $\quad \Delta S = (a+\Delta a)b - ab = b\cdot\Delta a = 20\cdot 0{,}11 = 2{,}2$ м^2

$\Delta P = (a+\Delta a+b)\cdot 2-(a+b)\cdot 2 = 2\Delta a = 0{,}22$ м

2) $\Delta b = 0{,}2$ м $\quad \Delta S = (b+\Delta b)\cdot a - ab = a\cdot\Delta b = 15\cdot 0{,}2 = 3$ м^2

$\Delta P = (a+b+\Delta b)\cdot 2-(a+b)\cdot 2 = 2\cdot\Delta b = 0{,}4$ м

Ответ: 1) 0,22м; 2,2 м^2; 2) 0,4м; 3м^2.

б) $R = 2$ см $\quad S_{\text{круга}} = \pi R^2$

1) $\Delta R = 0{,}2$ см $\quad \Delta S = \pi(R+\Delta R)^2 - \pi R^2 = \pi(2R\Delta R+\Delta R^2) =$

$\pi\cdot(2\cdot 2\cdot 0{,}2+0{,}04) = 0{,}84\pi$ см^2

2) $\Delta R = \Delta R$ $\quad \Delta S = \pi(2R\cdot\Delta R + R^2) = \pi R(2R+R)$

3) $\Delta R = 0{,}1$ см $\quad \Delta S = \pi(2\cdot 2\cdot 0{,}1+0{,}01) = 0{,}41\pi$ см^2.

4) $\Delta R = h$ $\quad \Delta S = \pi(2R\cdot h+h^2) = \pi h(2R+h)$

Ответ: 1) $0{,}84\pi$ см^2; 2) $\pi R(2R+R)$; 3) $0{,}41\pi$ см^2; 4) $\pi h(2R+h)$.

178. а) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}1$

$$\Delta f = -\frac{2}{x_0+\Delta x}+\frac{2}{x_0} = \frac{-2x_0+2x_0+2\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)} = \frac{2\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Delta f = \frac{2\cdot 0{,}1}{-2(-2+0{,}1)} = 0{,}0526$$

б) $f(x) = 2x^2-3$, $x_0 = 3$, $\Delta x = -0{,}2$

$\Delta f = 2(x_0+\Delta x)^2 - 3 - 2x_0^2 + 3 = \left(2x_0^2 + 4x_0\cdot\Delta x + 2\Delta x^2 - 3 - 2x_0^2 + 3\right) =$
$= 4x_0\Delta x + 2\Delta x^2 = 4\cdot 3(-0{,}2) + 2(-0{,}2)^2 = -2{,}4 + 0{,}08 = -2{,}32$

в) $f(x) = 3x+1$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 0{,}01$

$\Delta f = 3(x_0+\Delta x) + 1 - 3x_0 - 1 = 3\Delta x \qquad \Delta f = 3\cdot 0{,}01 = 0{,}03$

г) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1 \qquad \Delta f = \dfrac{(x_0+\Delta x)^2}{2} - \dfrac{x_0^2}{2} =$

$= \dfrac{2x_0\cdot\Delta x + \Delta x^2}{2} = \dfrac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{2} = \dfrac{0{,}1\cdot(4+0{,}1)}{2} = 0{,}205$

Ответ: а) 0,0526; б) –1,12; в) 0,03; г) 0,205.

179. а) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$; $\Delta x = x - x_0 = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}$

$\Delta f = \cos^2(x_0+\Delta x) - \cos^2 x_0 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos 2(x_0+\Delta x) - 1 - \cos 2x_0\right) =$

$= -\sin(2x_0+\Delta x)\cdot\sin\Delta x$; $\Delta f = -\sin\left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12}\right)\cdot\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{4}$

б) $f(x) = 4x - x^2$, $x_0 = 2{,}5$, $x = 2{,}6 \qquad \Delta x = x - x_0 = 0{,}1$

$\Delta f = 4(x_0+\Delta x) - (x_0+\Delta x)^2 - 4x_0 + x_0^2 = 4\Delta x - 2x_0\cdot\Delta x - \Delta x^2 =$

$= \Delta x(4 - 2x_0 - \Delta x) \qquad \Delta f = 0{,}1\cdot(4 - 2\cdot 2{,}5 - 0{,}1) = -0{,}11$

в) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{3} \qquad \Delta x = x - x_0 = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$

$\Delta f = \operatorname{tg}(x_0+\Delta x) - \operatorname{tg} x_0 = \dfrac{\sin(x_0+\Delta x - x_0)}{\cos(x_0+\Delta x)\cdot\cos x_0} = \dfrac{\sin\Delta x}{\cos(x_0+\Delta x)\cdot\cos x_0}$

$\Delta f = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{12}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{12}}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{12} = 2\sqrt{2}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) =$

$= 2\sqrt{2}\cdot\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) = \sqrt{3}-1$

г) $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $x_0 = 1{,}22$, $x = 1{,}345$

$\Delta x = x - x_0 = 1{,}345 - 1{,}22 = 0{,}125 \qquad \Delta f = \sqrt{2(x_0+\Delta x) - 1} - \sqrt{2x_0 - 1}$

$\Delta f = \sqrt{2\cdot 1{,}345 - 1} - \sqrt{2\cdot 1{,}22 - 1} = \sqrt{1{,}69} - \sqrt{1{,}44} = 1{,}3 - 1{,}2 = 0{,}1$

Ответ: а) $\Delta x = \dfrac{\pi}{12}$; $\Delta f = \dfrac{1}{4}$; **б)** $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta f = -0{,}11$;

в) $\Delta x = \dfrac{\pi}{12}$; $\Delta f = \sqrt{3}-1$; **г)** $\Delta x = 0{,}125$; $\Delta f = 0{,}1$.

180.а) $f(x) = 1 - 3x^2 \quad \Delta f = 1 - 3(x_0+\Delta x)^2 - 1 + 3x_0^2 = -3\Delta x(2x_0+\Delta x)$

б) $f(x) = ax + b \qquad \Delta f = a(x_0+\Delta x) + b - ax_0 - b = a\cdot\Delta x$

в) $f(x) = 2x^2 \qquad \Delta f = 2(x_0+\Delta x)^2 - 2x_0^2 = 2\Delta x(2x_0+\Delta x)$

г) $f(x) = -\dfrac{1}{x} \qquad \Delta f = \dfrac{1}{x_0+\Delta x} - \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{-x_0 + x_0 + \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)} = \dfrac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$

Ответ: а) $-3\Delta x(2x_0+\Delta x)$; **б)** $a\cdot\Delta x$; **в)** $2\Delta x(2x_0+\Delta x)$; **г)** $\dfrac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$.

181. $V_{ср} = \dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$ **а)** $t \in [0;\ 3]$ $V_{ср} = \dfrac{150 - 0}{3} = 50$ (км/ч)

б) $t \in [3;\ 5]$ $V_{ср} = \dfrac{280 - 150}{2} = 65$ (км/ч)

в) $t \in [3{,}25;\ 5{,}25]$ $V_{ср} = \dfrac{280 - 150}{2} = 65$ (км/ч)

г) $t \in [0;\ 8]$ $V_{ср} = \dfrac{460 - 0}{8} = 57{,}5$ (км/ч)

Ответ: 50 км/ч; 65 км/ч; 65 км/ч; 57,5 км/ч.

182. $x = 3 + 12t - t^2$ **а)** $I \in [2;\ 2{,}5]$

$\Delta x = x - x_0 = 26{,}75 - 23 = 3{,}75$ $V_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{3{,}75}{0{,}5} = 7{,}5$

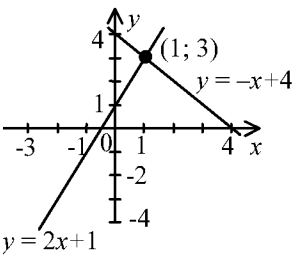
б) $I \in [7;\ 8]$ $\Delta x = x - x_0 = 35 - 38 = -3$ $V_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{-3}{1} = -3$

в) $I \in [4;\ 5]$ $\Delta x = x - x_0 = 38 - 35 = 3$ $V_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{3}{1} = 3$

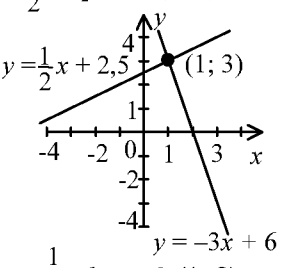
г) $I \in [6;\ 8]$ $\Delta x = x - x_0 = 35 - 39 = -4$ $V_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{-4}{2} = -2$

Ответ: а) на 3,75 в положительном направлении, $V_{ср} = 7{,}5$;
б) на 3 в отрицательном направлении, $V_{ср} = -3$;
в) на 3 в положительном направлении, $V_{ср} = 3$;
г) на 4 в отрицательном направлении, $V_{ср} = -2$.

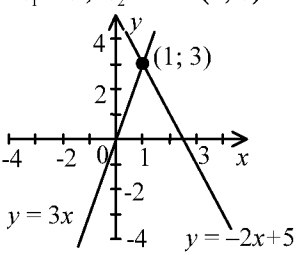
183. а) $k_1 = -1$, $k_2 = 2$ **(1; 3)**



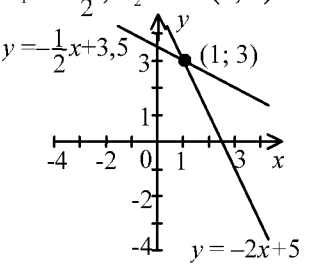
б) $k_1 = \dfrac{1}{2}$, $k_2 = -3$ **(1; 3)**



в) $k_1 = 3$, $k_2 = -2$ **(1; 3)**



г) $k_1 = -\dfrac{1}{2}$; $k_2 = -2$ **(1; 3)**



184. $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ $\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta f = \dfrac{1}{2}(x_1 + \Delta x)^2 - \dfrac{1}{2}x_1^2 = \dfrac{1}{2}\Delta x(2x_1 + \Delta x)$

а) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ $\quad \Delta x = 1 \quad \Delta f = \frac{1}{2}\cdot 1(2\cdot 0+1) = \frac{1}{2}$

$k = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha$ – острый угол

б) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ $\quad \Delta x = -1 \quad \Delta f = \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(2\cdot(-1)-1) = 1{,}5$

$k = 1{,}5 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1{,}5 \Rightarrow \alpha$ – острый угол

в) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ $\quad \Delta x = 1 \quad \Delta f = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2\cdot 1+1) = 1{,}5$

$k = 1{,}5 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1{,}5 \Rightarrow \alpha$ – острый угол

г) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ $\quad \Delta x = 1 \quad \Delta f = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2\cdot(-1)+1) = -\frac{1}{2}$

$k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha$ – тупой угол

185. $S_{\text{полной поверхности куба}} = 6x^2 \quad \Delta S = 6(x+\Delta x)^2 - 6x^2 = 6\Delta x(2x+\Delta x)$

Ответ: $\Delta S = 6\Delta x(2x+\Delta x)$.

186. а) $f(x) = -x^3 + 3x$

$\Delta f = -(x_0+\Delta x)^3 + 3(x_0+\Delta x) + x_0^3 - 3x_0 = -\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3)$

Ответ: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3)$.

б) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$$\Delta f = \frac{1}{(x_0+\Delta x)^2 - 1} + \frac{1}{x_0^2-1} = \frac{x_0^2 - 1 - x_0^2 - 2x_0\Delta x - \Delta x^2 + 1}{((x_0+\Delta x)^2-1)(x_0^2-1)} =$$

$$= \frac{-\Delta x(2x_0+\Delta x)}{((x_0+\Delta x)^2-1)(x_0^2-1)}$$ **Ответ:** $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{2x_0+\Delta x}{((x_0+\Delta x)^2-1)(x_0^2-1)}$.

в) $f(x) = x^3 - 2x$ $\quad \Delta f = (x_0+\Delta x)^3 - 2(x_0+\Delta x) - x_0^3 + 2x_0 =$

$= \Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2 - 2)$ **Ответ:** $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2 - 2$.

г) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$\Delta f = \frac{1}{(x_0+\Delta x)^2+1} - \frac{1}{x_0^2+1} = \frac{x_0^2 + 1 - x_0^2 - 2x_0\Delta x - \Delta x^2 - 1}{((x_0+\Delta x)^2+1)(x_0^2+1)} =$$

$$= \frac{-\Delta x(2x_0+\Delta x)}{((x_0+\Delta x)^2+1)(x_0^2+1)}$$ **Ответ:** $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{2x_0+\Delta x}{((x_0+\Delta x)^2+1)(x_0^2+1)}$

187. $t \in [t_0;\ t_0+\Delta t] \quad V_{\text{ср}} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$

а) $x(t) = V_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad V_{\text{ср}} = \frac{2V_0(t_0+\Delta t) - g(t_0+\Delta t)^2 - 2V_0 t_0 - gt_0^2}{2\Delta t} =$

$$= \frac{\Delta t(2V_0 - 2gt_0 - g\Delta t)}{2\Delta t} = \frac{2V_0 - 2gt_0 - g\Delta t}{2} = V_0 - gt_0 - \frac{g\Delta t}{2}$$

Ответ: $V_{\text{ср}} = V_0 - gt_0 - \frac{g\Delta t}{2}$.

б) $x(t) = -at + b$ $\qquad V_{ср} = \dfrac{-a(t_0 + \Delta t) + b + at_0 - b}{\Delta t} = -a$

Ответ: $V_{ср} = -a$.

в) $x(t) = \dfrac{gt^2}{2}$ $\qquad V_{ср} = \dfrac{g(t_0 + \Delta t)^2 - gt_0^2}{2\Delta t} = \dfrac{g\Delta t(2t_0 + \Delta t)}{2\Delta t} = \dfrac{g(2t_0 + \Delta t)}{2}$

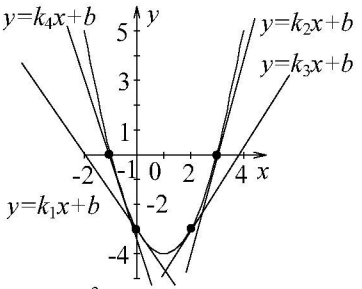
Ответ: $V_{ср} = \dfrac{g(2t_0 + \Delta t)}{2}$.

г) $x(t) = at - b$ $\qquad V_{ср} = \dfrac{a(t_0 + \Delta t) - b - at_0 + b}{\Delta t} = a$

Ответ: $V_{ср} = a$.

188. а) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4$

$x_0 = 0;\ x_0 = 3;\ x_0 = 2;\ x_0 = -1$ вершина (1; – 4)



Ответ: $k_3,\ k_2 > 0;\ k_1,\ k_4 < 0$

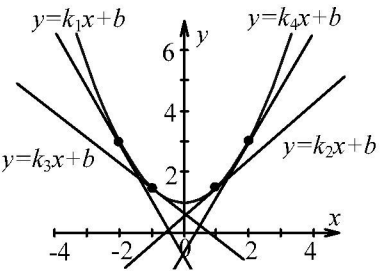
б) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$ вершина (0; 1)

$x_0 = -2;\ k_1 < 0$

$x_0 = 1;\ k_2 > 0$

$x_0 = -1;\ k_3 < 0$

$x_0 = 2;\ k_4 > 0$



Ответ: $k_2,\ k_4 > 0;\ k_1,\ k_3 < 0$

189. Ответ: а) $k(x_1) < 0;\ k(x_2);\ k(x_3)$ – не существуют; $k(x_4) > 0$

б) $k(x_1);\ k(x_2);\ k(x_3);\ k(x_4) > 0$

в) $k(x_1) < 0;\ k(x_2)$ – не существует; $k(x_3);\ k(x_4) > 0$

г) $k(x_1);\ k(x_2);\ k(x_3);\ k(x_4) < 0$

190. Ответ: $f(x)\uparrow$ *на* $[a;b];\ [c;d]$ $\qquad f(x)\downarrow$ *на* $[b;c];\ [d;e]$

$k(x_1) > 0;\ k(x_2) < 0;\ k(x_3) > 0;\ k(x_4) < 0$

191. а) $f(x) = 2x^2,\ x_0 = 1;\ \Delta x = 0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}01$

$\Delta f = 2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2 = 4x_0 \cdot \Delta x + 2\Delta x^2 = 2\Delta x(2x_0 + \Delta x)$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2(2x_0 + \Delta x)$ $\qquad \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2 \cdot 1 + 0{,}5) = 5$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2 \cdot 1 + 0{,}1) = 4{,}2$ $\qquad \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2 \cdot 1 + 0{,}01) = 4{,}02$ **Ответ:** 5; 4,2; 4,02

б) $f(x) = x^2,\ x_0 = 1;\ \Delta x = 0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}01$

$\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x)$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}=(2x_0+\Delta x)$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}=2\cdot 1+0{,}5=2{,}5$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}=2\cdot 1+0{,}1=2{,}1$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}=2\cdot 1+0{,}01=2{,}01$ **Ответ:** 2,5; 2,1; 2,01

192. а) $x_0=2$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}=8\cdot 2+4\Delta x\to 16$ $\Delta x\to 0$

$x_0=-1$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}=8\cdot(-1)+4\Delta x\to -8$ $\Delta x\to 0$

б) $x_0=1$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3\cdot 1+3\cdot 1\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\to 3$ $\Delta x\to 0$

$x_0=-21$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3\cdot(-21)^2+3(-21)\Delta x+(\Delta x)^2\to -1323$ $\Delta x\to 0$

в) $x_0=4$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3\cdot 4-2\Delta x\to 12$ $\Delta x\to 0$

$x_0=1$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3\cdot 1-2\Delta x\to 3$ $\Delta x\to 0$

г) $x_0=1$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}=-2\cdot 1+\Delta x\to -2$ $\Delta x\to 0$

$x_0=2$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}=-2\cdot 2+\Delta x\to -4$ $\Delta x\to 0$

Ответ: а) 16; – 8; **б)** 3; – 63; **в)** 12; 3; **г)** – 2; – 4

193. а) $f'(x)=(x^3)'=3x^2$ $x_0=2,$ $f'(2)=3\cdot 2^2=12$

$x_0=-1{,}5$ $f'(-1{,}5)=3\cdot(-1{,}5)^2=6{,}75$

б) $f'(x)=(4-2x)'=-2$ $f'(0{,}5)=f'(-3)=-2$

в) $f'(x)=(3x-2)'=3$ $f'(5)=f'(-2)=3$

г) $f'(x)=(x^2)'=2x$ $x_0=2{,}5$ $f'(2{,}5)=2\cdot 2{,}5=5$

$x_0=-1$ $f'(-1)=2\cdot(-1)=-2$

Ответ: а) 12; 6,75; **б)** – 2; – 2 **в)** 3; 3; **г)** 5; – 2.

194. а) $f(x)=x^2-3x$ $x_0=-1;\ 2$

$\Delta f=(x_0+\Delta x)^2-3(x_0+\Delta x)-x_0^2+3x_0=$

$=2x_0\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x=\Delta x(2x_0+\Delta x-3)$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x-3)}{\Delta x}=2x_0+\Delta x-3\underset{\Delta x\to 0}{\to}2x_0-3$

$f'(x_0)=2x_0-3$; $f'(-1)=2\cdot(-1)-3=-5$; $f'(2)=2\cdot 2-3=1$

б) $f(x)=2x^3$ $x_0=0;\ 1$

$\Delta f=2(x_0+\Delta x)^3-2x^3=2\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2)$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x}=2(3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2)$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}\to 6x_0^2$; $f'(x_0)=6x_0^2$; $f'(0)=6\cdot 0=0$; $f'(1)=6$

в) $f(x)=\frac{1}{x}$ $x_0=-2;\ 1$ $\Delta f=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0-x_0-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0}=-\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{\Delta x\left(x_0+\Delta x\right)x_0}=-\frac{1}{x_0\left(x_0+\Delta x\right)}\underset{\Delta x\to 0}{\to}-\frac{1}{x_0{}^2}$$

$$f'\left(x_0\right)=-\frac{1}{x_0{}^2}\qquad f'\left(-2\right)=-\frac{1}{\left(-2\right)^2}=-\frac{1}{4}\qquad f'\left(1\right)=-\frac{1}{1^2}=-1$$

г) $f\left(x\right)=4-x^2\qquad x_0=3;\ 0$

$$\Delta f=4-\left(x_0+\Delta x\right)^2-4+x_0{}^2=-\Delta x\left(2x_0+\Delta x\right)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=-\frac{\Delta x\left(2x_0+\Delta x\right)}{\Delta x}=-2x_0-\Delta x\underset{\Delta x\to 0}{\to}-2x_0$$

$$f'\left(x_0\right)=-2x_0;\ f'\left(3\right)=-2\cdot 3=-6;\ f'\left(0\right)=-2\cdot 0=0$$

Ответ: а) – 5; 1; **б)** 0; 4; **в)** $-\frac{1}{4}$; – 1; **г)** – 6; 0

195. $f\left(x\right)=x^2\qquad \Delta f\left(x\right)=\left(x_0+\Delta x\right)^2-x_0{}^2=\Delta x\left(2x_0+\Delta x\right)$

$$k\left(\Delta x\right)=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta x\left(2x_0+\Delta x\right)}{\Delta x}=2x_0+\Delta x\underset{\Delta x\to 0}{\to}2x_0\qquad k=f'\left(x_0\right)=2x_0$$

а) $x_0=-1$, $k=2\cdot(-1)=-2$

$f(-1)=1$, $y=-2x-1$ – уравнение касательной в точке $x_0=-1$

б) $x_0=3$, $k=2\cdot 3=6$

$f(3)=9$, $y=6x-9$ – уравнение касательной в точке $x_0=3$

в) $x_0=0$, $k=2\cdot 0=0$

$f(0)=0$, $y=0$ – уравнение касательной в точке $x_0=0$

г) $x_0=2$, $k=2\cdot 2=4$

$f(2)=4$, $y=4x-4$ – уравнение касательной в точке $x_0=2$

Ответ: а) $y=-2x-1$; **б)** $y=6x-9$; **в)** $y=0$; **г)** $y=4x-4$.

196.а) $x(t)=-t^2+8t$, $t_0=6\quad \Delta x=-\left(t_0+\Delta t\right)^2+8\left(t_0+\Delta t\right)+t_0^2-8t_0=$
$=-2t_0\Delta t-\Delta t^2+8\Delta t=\Delta t(8-2t_0-\Delta t)$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta t(8-2t_0-\Delta t)}{\Delta t}=8-2t_0-\Delta t\qquad 8-2t_0-\Delta t\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}8-2t_0$$

$V_{\text{мгп}}(t_0)=8-2t_0\qquad V_{\text{мгп}}(6)=8-2\cdot 6=-4$

б) $x(t)=3t^3+2$, $t_0=2\qquad \Delta x=3\left(t_0+\Delta t\right)^3+2-3t_0^3-2=$
$=3t_0^3+9t_0^2\Delta t+9t_0\Delta t^2+3\Delta t^3-3t_0^3=3\Delta t\left(3t_0^2+3t_0\Delta t+\Delta t^2\right)$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{3\Delta t\left(3t_0^2+3t_0\Delta t+\Delta t^2\right)}{\Delta t}=3t_0^2+3t_0\Delta t+\Delta t^2\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}9t_0^2$$

$V_{\text{мгп}}(t_0)=9t_0^2\qquad V_{\text{мгн}}(2)=9\cdot 2^2=36$

в) $x(t)=\frac{t^2}{4}$, $t_0=4$

$$\Delta x=\frac{1}{4}\left(t_0+\Delta t\right)^2-\frac{t_0^2}{4}=\frac{1}{4}t_0^2+\frac{1}{2}t_0\Delta t^2+\frac{1}{4}\Delta t^2-\frac{1}{2}t_0^2=\frac{1}{2}\Delta t\left(t_0+\frac{1}{2}\Delta t\right)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}\Delta t\left(t_0+\frac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left(t_0+\frac{1}{2}\Delta t\right)\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\frac{1}{2}t_0$$

$V_{\text{мгн}}(t_0) = \frac{1}{2}t_0$ $\qquad$ $V_{\text{мгн}}(4) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$

г) $x(t) = 5t - 3$, $t_0 = 10$ $\qquad$ $\Delta x = 5(t_0 + \Delta t) - 3 - 5t_0 + 3 = 5\Delta t$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5\Delta t}{\Delta t} = 5\ ;\ \frac{1}{2}\left(t_0 + \frac{1}{2}\Delta t\right) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{1}{2}t_0\ ;\ V_{\text{мгн}}(t_0) = 5\ ;\ V_{\text{мгн}}(10) = 5$$

Ответ: а) –4; **б)** 36; **в)** 2; **г)** 5.

§4 п. 14

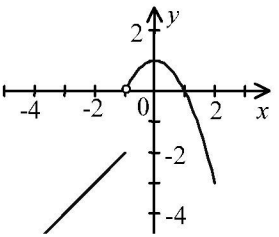
197. Ответ: а) $f(x)$ непрерывна в x_1, x_2, x_3.

б) $f(x)$ непрерывна в x_1 и x_2; $f(x)$ не непрерывна в точке x_2;

в) $f(x)$ непрерывна в x_1, x_2; $f(x)$ не является непрерывной в x_3.

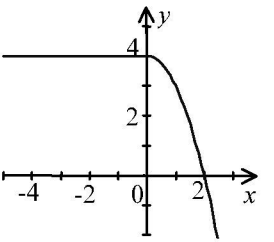
г) $f(x)$ непрерывна в x_1, x_2, x_3.

198. а) $f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ при } x \le -1 \\ 1 - x^2 \text{ при } x > -1 \end{cases}$



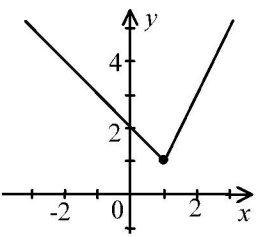
Ответ: $f(x)$ не является непрерывной в точке $x = -1$.

б) $f(x) = \begin{cases} 4 \text{ при } x < 0 \\ 4 - x^2 \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$



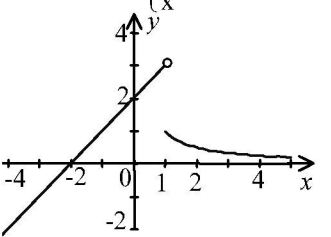
Ответ: $f(x)$ непрерывна на всей $D(f)$.

в) $f(x) = \begin{cases} 2 - x \text{ при } x \le 1 \\ 2x - 1 \text{ при } x > 1 \end{cases}$



Ответ: $f(x)$ непрерывна на всей $D(f)$.

г) $f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ при } x < 1 \\ \frac{1}{x} \text{ при } x \ge 1 \end{cases}$



Ответ: $f(x)$ не является непрерывной в $x = 1$.

199. а) $f(x) = x^3 - 4x$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$ $\quad$ Пусть $x_0 \in (-\infty;\ +\infty)$

$|\Delta x| \le |x_0|$ $\qquad$ $|\Delta f| = \left|(x_0 + \Delta x)^3 - 4(x_0 + \Delta x) - x_0^3 + 4x_0\right| =$

$= \left|x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 - 4\Delta x\right| =$

$= \left|x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 - 4\Delta x\right| < |\Delta x|\cdot\left|3x_0^2 - 4\right|$

$\Delta x \to 0$ $\qquad$ Следовательно, $f(x)$ непрерывна на $(-\infty;\ +\infty)$.

б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$, $x\in[2;\ \infty)$ Пусть $x_0\in[2;\ \infty)$ $|\Delta x|\le|x_0|$

$$|\Delta f|=\left|\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}}{x_0+\Delta x-1}-\frac{\sqrt{x_0}}{x_0-1}\right|=\left|\frac{x_0\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0+\Delta x}-x_0\sqrt{x_0}-\Delta x\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}{(x_0+\Delta x-1)(x_0-1)}\right|=$$

$$=\frac{|\Delta x|\sqrt{x_0}}{(x_0-1)^2}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0\ \Rightarrow\ f(x)\text{ непрерывна на }[2;\ \infty).$$

в) $f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$, $x_0\in[-10;\ 20]$

$|\Delta x|\le|x_0|$ $|\Delta f|=\left|(x_0+\Delta x+1)^2-2-(x_0+1)^2+2\right|=$

$$=\left|(x_0+\Delta x+1-x_0-1)(x_0+\Delta x+1+x_0+1)\right|=$$

$$=\left|\Delta x\cdot(2x_0+2+\Delta x)\right|\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0\ \Rightarrow\ f(x)\text{ непрерывна на }[-10;\ 20].$$

г) $f(x)=5x-\sqrt{x}$, $x\in(0;\ \infty)$ Пусть $x_0\in(0;\ \infty)$

$|\Delta x|\le|x_0|$ $|\Delta f|=\left|5(x_0+\Delta x)-\sqrt{x_0+\Delta x}-5x_0+\sqrt{x_0}\right|=$

$$=\left|(x_0+\Delta x+1-x_0-1)(x_0+\Delta x+1+x_0+1)\right|=$$

$$=\left|5\Delta x-\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right|\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0\ \Rightarrow\ f(x)\text{ непрерывна на }(0;\ \infty).$$

Ответ: а); б); в); г) – $f(x)$ является непрерывной.

200. а) $f(x)=x^2-3x+4$ $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}4$; $f(x)\xrightarrow[x\to 2]{}2$

б) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ $f(x)\xrightarrow[x\to 1]{}\dfrac{1}{2}$; $f(x)\xrightarrow[x\to 4]{}\dfrac{4}{17}$

в) $f(x)=4-\dfrac{x}{2}$ $f(x)\xrightarrow[x\to -2]{}5$; $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}4$

г) $f(x)=4x-\dfrac{x^2}{4}$ $f(x)\xrightarrow[x\to -1]{}-4\dfrac{1}{4}$; $f(x)\xrightarrow[x\to 4]{}12$

Ответ: а) 4; 2; **б)** $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{4}{17}$; **в)** 5; 4; **г)** $-4\dfrac{1}{4}$; 12.

201. $f(x)\xrightarrow[x\to 3]{}1$; $g(x)\xrightarrow[x\to 3]{}-2$

а) $3f(x)g(x)\xrightarrow[x\to 3]{}-6$ **б)** $\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}\xrightarrow[x\to 3]{}-3$

в) $4f(x)-g(x)\xrightarrow[x\to 3]{}6$ **г)** $(3-g(x))f(x)\xrightarrow[x\to 3]{}5$

Ответ: а) –6; **б)** –3; **в)** 6; **г)** 5.

202. $f(x)\xrightarrow[x\to -1]{}3$; $g(x)\xrightarrow[x\to -1]{}-0{,}5$

а) $\dfrac{f(x)}{(g(x))^2}\xrightarrow[x\to -1]{}12$ **б)** $(f(x)-g(x))^2\xrightarrow[x\to -1]{}12{,}25$

в) $(f(x))^2+2g(x)\xrightarrow[x\to -1]{}8$ **г)** $\dfrac{(g(x))^2}{f(x)-2}\xrightarrow[x\to -1]{}0{,}25$

Ответ: а)12; **б)** 12,25; **в)** 8; **г)** 0,25.

203. а) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x-3}\xrightarrow[x\to 4]{}30$ **б)** $f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x^2-2x+7}\xrightarrow[x\to -1]{}0{,}2$

в) $f(x)=\dfrac{5-2x}{2+x}\xrightarrow[x\to 2]{}\dfrac{1}{4}$ **г)** $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}\xrightarrow[x\to -1]{}-4$

Ответ: а) 30; **б)** 0,2; **в)** $\dfrac{1}{4}$; **г)** –4.

204. Ответ: $h = 0{,}04$ дм, так как $P_{\square} = 4a$

205. Ответ: $h = 0{,}01$ дм, так как $P_{\Delta} = 3a$.

206. Ответ: $h \approx 0{,}01$ дм, так как $l = 2\pi R$

207. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} B$

а) $\left.\begin{array}{l} C \to C \\ f(x) \to A \\ x \to a \end{array}\right| \Rightarrow C \cdot f(x) \xrightarrow[x\to a]{} C \cdot A$

б) $\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A \\ -g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -B \end{array}\right| \Rightarrow f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to a]{} A - B$

в) $\left.\begin{array}{l} f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to a]{} A - B \\ f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} A + B \end{array}\right| \Rightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) =$

$= \big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2 \xrightarrow[x\to a]{} A^2 - B^2$

г) $\left.\begin{array}{l} \big(f(x)\big)^{n-1} \xrightarrow[x\to a]{} A^{n-1} \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} A \end{array}\right| \Rightarrow \big(f(x)\big)^n \xrightarrow[x\to a]{} A^n$

§4 п. 15

208. а) $f'(x) = \left(x^2 + x^3\right)' = 2x + 3x^2$

б) $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x} + 5x - 2\right)' = -\dfrac{1}{x^2} + 5$

в) $f'(x) = \left(x^2 + 3x - 1\right)' = 2x + 3$

г) $f'(x) = \left(x^3 + \sqrt{x}\right)' = 3x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ответ: а) $2x + 3x^2$; **б)** $-\dfrac{1}{x^2} + 5$; **в)** $2x + 3$; **г)** $3x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

209. а) $f'(x) = \left(x^3\left(4 + 2x - x^2\right)\right)' = 3x^2\left(4 + 2x - x^2\right) + x^3\left(2 - 2x\right) =$

$= 12x^2 + 6x^3 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^4 = -5x^4 + 8x^3 + 12x^2$

б) $f'(x) = \left(\sqrt{x}\left(2x^2 - x\right)\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(2x^2 - x\right) + \sqrt{x}\left(4x - 1\right) =$

$= x\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x} + 4x\sqrt{x} - \sqrt{x} = 5x\sqrt{x} - 1\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$

в) $f'(x) = \left(x^2\left(3x + x^3\right)\right)' = 2x\left(3x + x^3\right) + x^2\left(3 + 3x^2\right) =$

$= 6x^2 + 2x^4 + 3x^2 + 3x^4 = 5x^4 + 9x^2$

г) $f'(x) = \left(\left(2x - 3\right)\left(1 - x^3\right)\right)' = 2\left(1 - x^3\right) + \left(2x - 3\right) \cdot \left(-3x^2\right) =$

$= 2 - 2x^3 - 6x^3 + 9x^2 = 2 - 8x^3 + 9x^2$

Ответ: а) $-5x^4 + 8x^3 + 12x^2$; **б)** $5x\sqrt{x} - 1\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$;

в) $5x^4 + 9x^2$; **г)** $2 - 8x^3 + 9x^2$.

210. а) $y' = \left(\frac{1+2x}{3-5x}\right)' = \frac{2(3-5x)-(-5)(1+2x)}{(3-5x)^2} =$

$= \frac{6-10x+5+10x}{(3-5x)^2} := \frac{11}{(3-5x)^2}$

б) $y' = \left(\frac{x^2}{2x-1}\right)' = \frac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$

в) $y' = \left(\frac{3x-2}{5x+8}\right)' = \frac{3(5x+8)-5(3x-2)}{(5x+8)^2} =$

$= \frac{15x+24-15x+10}{(5x+8)^2} = \frac{34}{(5x+8)^2}$

г) $y' = \left(\frac{3-4x}{x^2}\right)' = \frac{-4x^2-2x(3-4x)}{x^4} =$

$= \frac{-4x^2-6x+8x^2}{x^4} = \frac{x(4x-6)}{x^4} = \frac{4x-6}{x^3}$

Ответ: а) $\frac{11}{(3-5x)^2}$; **б)** $\frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$; **в)** $\frac{34}{(5x+8)^2}$; **г)** $\frac{4x-6}{x^3}$.

211. а) $y' = \left(x^8-3x^4-x+5\right)' = 8x^7-12x^3-1$

б) $y' = \left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x^2}+\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{3}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

в) $y' = \left(x^7-4x^5+2x-1\right)' = 7x^6-20x^4+2$

г) $y' = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x^3}+1\right)' = \frac{2x}{2}-\frac{9x^2}{x^6} = x-\frac{9}{x^4} = \frac{x^5-9}{x^4}$

Ответ: а) $8x^7-12x^3-1$; **б)** $\frac{1}{3}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $7x^6-20x^4+2$; **г)** $\frac{x^5-9}{x^4}$.

212. а) $f'(x) = \left(x^2-3x\right)' = 2x-3$ $\quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-3 = -4$

$f'(2) = 2\cdot 2-3 = 1$

б) $f'(x) = \left(x-4\sqrt{x}\right)' = 1-\frac{2}{\sqrt{x}}$

$f'(0{,}01) = 1-\frac{2}{\sqrt{0{,}01}} = 1-20 = -19$ $\quad f'(4) = 1-\frac{2}{\sqrt{4}} = 1-1 = 0$

в) $f'(x) = \left(x-\frac{1}{x}\right)' = 1+\frac{1}{x^2}$

$f'\left(\sqrt{2}\right) = 1+\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1+\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ $\quad f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1+\frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1+3 = 4$

г) $f'(x)=\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)'=\dfrac{-(2+x)-(3-x)}{(2+x)^2}=\dfrac{-5}{(2+x)^2}$

$f'(-3)=\dfrac{-5}{(2-3)^2}=-5 \qquad f'(0)=\dfrac{-5}{(2+0)^2}=-\dfrac{5}{4}=-1{,}25$

Ответ: а) –4; 1; **б)** –19; 0; **в)** $1\dfrac{1}{2}$; 4; **г)** –5; –1,25.

213. а) $f'(x)=\left(2x^2-x\right)'=4x-1$; $f'(x)=0$; $4x-1=0$; $x=0{,}25$.

б) $f'(x)=\left(-\dfrac{2}{3}x^3+x^2+12\right)'=-2x^2+2x$

$f'(x)=0$; $-2x^2+2x=0$; $-2x(x-1)=0$; $x_1=0$; $x_2=1$

в) $f'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}-1{,}5x^2-4x\right)'=x^2-3x-4$

$f'(x)=0$; $x^2-3x-4=0$ $\begin{cases}x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=-4\end{cases}$ $x_1=4$; $x_2=-1$

г) $f'(x)=\left(2x-5x^2\right)'=2-10x$; $f'(x)=0$; $2-10x=0$; $x=0{,}2$

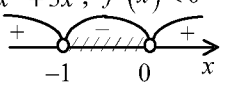
Ответ: а) $x=0{,}25$; **б)** $x_1=0$, $x_2=1$; **в)** $x_1=4$; $x_2=-1$; **г)** $x=0{,}2$.

214. а) $f'(x)=\left(4x-3x^2\right)'=4-6x$

$f'(x)<0$; $4-6x<0$; $-6x<-4$; $x>\dfrac{2}{3}$ **Ответ:** $x\in\left(\dfrac{2}{3};\ \infty\right)$.

б) $f'(x)=\left(x^3+1{,}5x^2\right)'=3x^2+3x$; $f'(x)<0$

$3x^2+3x<0$; $3x(x+1)<0$

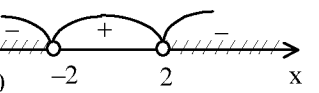


Ответ: $x\in(-1;\ 0)$.

в) $f'(x)=\left(x^2-5x\right)'=2x-5$

$f'(x)<0$; $2x-5<0$; $2x<5$; $x<2{,}5$ **Ответ:** $x\in(-\infty;\ 2{,}5)$.

г) $f'(x)=\left(4x-\dfrac{1}{3}x^3\right)'=4-x^2$



$f'(x)<0$; $4-x^2<0$; $(2-x)(2+x)<0$

Ответ: $x\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.

215. а) $f'(x)=\left(\dfrac{x^3-3x}{1+4x^5}\right)'=\dfrac{(3x^2-3)(1+4x^5)-20x^4(x^3-3x)}{(1+4x^5)^2}=$

$=\dfrac{3x^2-3+12x^7-12x^5-20x^7+60x^5}{(1+4x^5)^2}=\dfrac{-8x^7+48x^5+3x^2-3}{(1+4x^5)^2}$

б) $f'(x)=\left(\left(\dfrac{3}{x}+x^2\right)\left(2-\sqrt{x}\right)\right)'=\left(-\dfrac{3}{x^2}+2x\right)\left(2-\sqrt{x}\right)+$

$+\left(\dfrac{3}{x}+x^2\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{-6}{x^2}+4x+\dfrac{3\sqrt{x}}{x^2}-2x\sqrt{x}-\dfrac{3}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}=$

$$=\frac{-12\sqrt{x}+8x^3\sqrt{x}+6x-4x^4-3x-x^4}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{-12\sqrt{x}+8x^3\sqrt{x}+3x-5x^4}{2x^2\sqrt{x}}$$

в) $f'(x)=\left(\frac{5-2x^6}{1-x^3}\right)'=\frac{-12x^5\left(1-x^3\right)+3x^2\left(5-2x^6\right)}{\left(1-x^3\right)^2}=$

$$=\frac{-12x^5+12x^8+15x^2-6x^8}{\left(1-x^3\right)^2}=\frac{15x^2+6x^8-12x^5}{\left(1-x^3\right)^2}$$

г) $f'(x)=\left(\sqrt{x}\left(3x^5-x\right)\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(3x^5-x\right)+$

$$+\sqrt{x}\cdot\left(15x^4-1\right)=\frac{3x^5-x+30x^5-2x}{2\sqrt{x}}=\frac{33x^5-3x}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}\left(11x^4-1\right)$$

Ответ: а) $\frac{-8x^7+48x^5+3x^2-3}{\left(1+4x^5\right)^2}$; **б)** $\frac{-12\sqrt{x}+8x^3\sqrt{x}+3x-5x^4}{2x^2\sqrt{x}}$;

в) $\frac{15x^2+6x^8-12x^5}{\left(1-x^3\right)^2}$; **г)** $\frac{3}{2}\sqrt{x}\left(11x^4-1\right)$.

216. а) $f'(x)=\left(x^5-3\frac{1}{3}x^3+5x\right)'=5x^4-10x^2+5$

$f'(x)=0$; $5x^4-10x^2+5=0$; $x^4-2x^2+1=0$; $\left(x^2-1\right)^2=0$;

$x^2=1$; $x_{1,2}=\pm1$ **Ответ:** $x_{1,2}=\pm1$

б) $f'(x)=\left(2x^4-x^8\right)'=8x^3-8x^7$; $f'(x)=0$; $8x^3-8x^7=0$;

$8x^3\left(1-x^4\right)=0$; $x_1=0$; $x^4=1$; $x_{2,3}=\pm1$ **Ответ:** $x_1=0; x_{2,3}=\pm1$

в) $f'(x)=\left(x^4+4x\right)'=4x^3+4$;

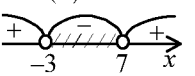
$f'(x)=0$; $4x^3+4=0$; $x^3=-1$; $x=-1$ **Ответ:** $x=-1$

г) $f'(x)=\left(x^4-12x^2\right)'=4x^3-24x$; $f'(x)=0$; $4x^3-24x=0$;

$4x\left(x^2-6\right)=0$; $x_1=0$; $x^2=6$; $x_{2,3}=\pm\sqrt{6}$ **Ответ:** $x_1=0; x_{2,3}=\pm\sqrt{6}$

217. а) $f'(x)=\left(x^3-6x^2-63x\right)'=3x^2-12x-63$ $f'(x)<0$

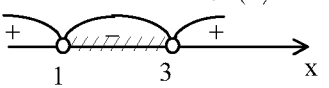
$3x^2-12x-63<0$; $x^2-4x-21<0$; $x^2-4x-21=0$



$\begin{cases}x_1+x_2=4\\x_1\cdot x_2=-21\end{cases}$ $x_1=7$; $x_2=-3$; $(x-7)(x+3)<0$ **Ответ:** $x\in(-3;\ 7)$

б) $f'(x)=\left(3x-5x^2+x^3\right)'=3-10x+3x^2$ $f'(x)<0$

$3-10x+3x^2<0$



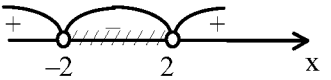
$3-10x+3x^2=0$

$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\frac{5\pm4}{3}$; $x_1=3$; $x_2=\frac{1}{3}$; $3(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)<0$

Ответ: $x\in\left(\frac{1}{3};\ 3\right)$.

в) $f'(x)=\left(\frac{2}{3}x^3-8x\right)'=2x^2-8$ $\quad f'(x)<0$; $2x^2-8<0$

$x^2-4<0$; $(x-2)(x+2)<0$

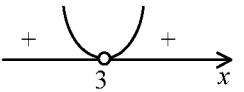


Ответ: $x\in(-2;\ 2)$.

г) $f'(x)=\left(3x^2-9x-\frac{1}{3}x^3\right)'=6x-9-x^2$ $\quad f'(x)<0$

$6x-9-x^2<0$; $x^2-6x+9>0$;

$(x-3)^2>0$ **Ответ:** $x\in(-\infty;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$.



218. Ответ: а) $f(x)=x^2+3x+4$; **б)** $f(x)=4x^4-0{,}4x+5$;

в) $f(x)=4x^2-2x-8$; **г)** $f(x)=3x^3-\frac{1}{2}x+16$.

219. Ответ: а) не верно. Пример: $f_1(x)=|x|$ и $f_2(x)=-|x|$ не имеет производной в точке $x_0=0$, а $\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x)=|x|-|x|=0$ имеет производную в точке $x_0=0$, т.к. производная $C'=0$. $(0'=0)$

б) не верно. Пример: $f_1(x)=x^2$ имеет производную в точке $x_0=0$, а $f_2(x)=|x|$ не имеет производной в точке $x_0=0$

§4 п.16

220.Ответ:а) $f(x)=3x$; $g(x)=\cos x$ **б)** $f(x)=2x-\frac{\pi}{3}$; $g(x)=\sin x$

в) $f(x)=\frac{x}{2}$; $g(x)=\operatorname{tg}x$ **г)** $f(x)=3x+\frac{\pi}{4}$; $g(x)=\cos x$.

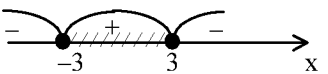
221. Ответ:а) $f(x)=3-5x$; $g(x)=x^5$ **б)** $f(x)=\cos x$; $g(x)=\sqrt{x}$

в) $f(x)=2x+1$; $g(x)=x^7$ **г)** $f(x)=\frac{1}{x}$; $g(x)=\operatorname{tg}x$.

222. а) $y=\sqrt{9-x^2}$ $\quad D(f)$: $9-x^2\ge 0$

$(3-x)(3+x)\ge 0$

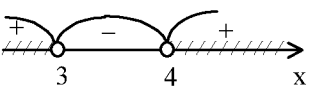
$x\in[-3;\ 3]$



б) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}}$ $\quad D(f)$: $x^2-7x+12>0$

$(x-3)(x-4)>0$

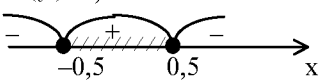
$x\in(-\infty;\ 3)\cup(4;\ \infty)$



в) $y=\sqrt{0{,}25-x^2}$ $\quad D(f)$: $0{,}25-x^2\ge 0$

$(0{,}5-x)(0{,}5+x)\ge 0$

$x\in[-0{,}5;\ 0{,}5]$

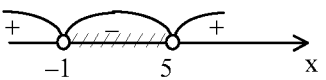


г) $y=\frac{1}{\sqrt{4x+5-x^2}}$ $\quad D(f)$: $4x+5-x^2>0$

$x^2-4x-5<0$

$(x-5)(x+1)<0$

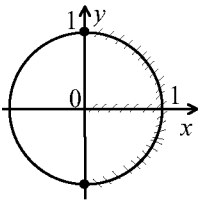
$x\in(-1;\ 5)$



Ответ: а) $[-3;\ 3]$; **б)** $(-\infty;\ 3)\cup(4;\ \infty)$; **в)** $[-0{,}5;\ 0{,}5]$; **г)** $(-1;\ 5)$.

223. а) $y=\sqrt{\cos x}$; $D(f)$: $\cos x \ge 0$

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k \in Z$



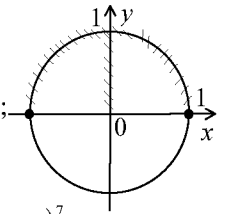
б) $y=\dfrac{1}{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$; $D(f)$: $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \ne 0$

$x-\frac{\pi}{6} \ne k\pi \qquad x \ne \frac{\pi}{6}+k\pi$, $k \in Z$

в) $y=\operatorname{tg}2x$; $D(f)$: $\cos 2x \ne 0$; $2x \ne \frac{\pi}{2}+k\pi$; $x \ne \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$

г) $y=\sqrt{\sin x} \qquad D(f)$: $\sin x \ge 0$

$2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$, $k \in Z$



Ответ: а) $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$; **б)** $x \ne \frac{\pi}{6}+k\pi$;

в) $x \ne \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; **г)** $\left[2k\pi;\ \pi+2k\pi\right]$, $k \in Z$.

224. а) $f'(x)=\left(\left(2x-7\right)^8\right)'=2\cdot 8\left(2x-7\right)^7=16\left(2x-7\right)^7$

б) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\left(5x+1\right)^3}\right)'=\dfrac{-5\cdot 3\left(5x+1\right)^2}{\left(5x+1\right)^6}=\dfrac{-15}{\left(5x+1\right)^4}$

в) $f'(x)=\left(\left(9x+5\right)^4\right)'=9\cdot 4\cdot\left(9x+5\right)^3=36\left(9x+5\right)^3$

г) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\left(6x-1\right)^5}\right)'=\dfrac{-6\cdot 5\cdot\left(6x-1\right)^4}{\left(6x-1\right)^{10}}=\dfrac{-30}{\left(6x-1\right)^6}$

Ответ: а) $16\left(2x-7\right)^7$; **б)** $\dfrac{15}{\left(5x+1\right)^4}$; **в)** $36\left(9x+5\right)^3$; **г)** $\dfrac{30}{\left(6x-1\right)^6}$.

225. а) $f'(x)=\left(\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-9}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot(-9)\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-10}=4{,}5\cdot\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-10}$

б) $f'(x)=\left(\left(\frac{1}{4}x-7\right)^8-\left(1-2x\right)^4\right)'=\frac{1}{4}\cdot 8\left(\frac{1}{4}x-7\right)^7-$

$-(-2)\cdot 4\cdot\left(1-2x\right)^3==2\left(\frac{1}{4}x-7\right)^7+8\left(1-2x\right)^3$

в) $f'(x)=\left(\left(4-1{,}5x\right)^{10}\right)'=-1{,}5\cdot 10\left(4-1{,}5x\right)^9=-15\cdot\left(4-1{,}5x\right)^9$

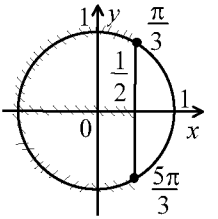
г) $f'(x)=\left(\left(5x-2\right)^{13}-\left(4x+7\right)^{-6}\right)'=5\cdot 13\left(5x-2\right)^{12}-4\cdot(-6)\cdot\left(4x+7\right)^{-7}=$

$=65\left(5x-2\right)^{12}+24\left(4x+7\right)^{-7}$

Ответ: а) $4{,}5\cdot\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-10}$; **б)** $2\left(\frac{1}{4}x-7\right)^7+8\left(1-2x\right)^3$;

в) $-15\cdot\left(4-1{,}5x\right)^9$; **г)** $65\left(5x-2\right)^{12}+24\left(4x+7\right)^{-7}$.

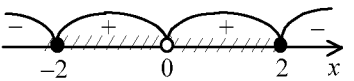
226. а) $y=\sqrt{1-2\cos x}$; $D(f):1-2\cos x\ge 0$



$\cos x\le\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{5\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$

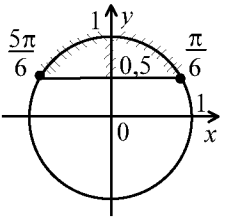
б) $y=\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}$



$D(f):\frac{4}{x^2}-1\ge 0;\ \frac{4-x^2}{x^2}\ge 0;\ \frac{(2-x)(2+x)}{x^2}\ge 0;\ x\in[-2;\ 0)\cup(0;\ 2]$

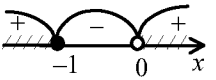
в) $y=\sqrt{\sin x-0{,}5}$ $\quad D(f):\sin x-0{,}5\ge 0$ $\quad \sin x\ge 0{,}5$

$\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in Z$



г) $y=\sqrt{\frac{1}{x}+1}$; $D(f):\frac{1}{x}+1\ge 0$; $\frac{x+1}{x}\ge 0$

$x\in(-\infty;\ -1]\cup(0;\ +\infty)$



Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{5\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$; **б)** $x\in[-2;\ 0)\cup(0;\ 2]$;

в) $\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in Z$; **г)** $x\in(-\infty;\ -1]\cup(0;\ +\infty)$.

227. Ответ: а) $h(x)=3-2x^2$; **б)** $h(x)=\sin^2 x$;

в) $h(x)=(3-2x)^2$; **г)** $h(x)=\sin(3-2x)$.

228. Ответ: а) $\mathrm{h(x)}=\frac{1}{\cos\mathrm{x}-1}$; $\mathrm{D(h)}=\mathrm{R}$; $x\ne 2\pi k, k\in Z$.

б) $\mathrm{h(x)}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}-1}$; $\mathrm{D(h)}=[0;1)\cup(1;+\infty)$

в) $\mathrm{h(x)}=\sqrt{\cos\mathrm{x}}$; $\mathrm{D(h)}=\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right], k\in Z$;;

г) $\mathrm{h(x)}=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{x}-1}}$; $\mathrm{D(h)}=(1;\infty)$.

229. Ответ: а) $f(x)=\frac{x}{2}$; **б)** $f(x)=x^2$;

в) $f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$; **г)** $f(x)=-\sqrt{x-1}$.

230. а) $f'(x)=\left(\left(x^3-2x^2+3\right)^{17}\right)'=17\left(3x^2-4x\right)\left(x^3-2x^2+3\right)^{16}$

б) $f'(x)=\left(\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{x^2+3}\right)'=-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}-\frac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}$

в) $f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+5}\right)'=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+5}}$

г) $f'(x)=\left(\left(3-x^3\right)^5+\sqrt{2x-7}\right)'=-15x^2\left(3-x^3\right)^4+\frac{1}{\sqrt{2x-7}}$

§4 п. 17

231.а) $(2\sin x)' = 2\cos x$ **б)** $\left(1-\frac{1}{2}\sin x\right)' = -\frac{1}{2}\cos x$

в) $(-0{,}5\sin x)' = -0{,}5\cos x$ **г)** $(0{,}5+1{,}5\sin x)' = 1{,}5\cos x$

Ответ: а) $2\cos x$; **б)** $-\frac{1}{2}\cos x$; **в)** $-0{,}5\cos x$; **г)** $1{,}5\cos x$.

232. а) $(3\cos x)' = -3\sin x$ **б)** $(x+2\cos x)' = 1-2\sin x$

в) $(1-\cos x)' = \sin x$ **г)** $(2\sin x+1{,}5\cos x)' = 2\cos x-1{,}5\sin x$

Ответ: а) $-3\sin x$; **б)** $1-2\sin x$; **в)** $\sin x$; **г)** $2\cos x-1{,}5\sin x$.

233. а) $\left(\sqrt{3}-3\operatorname{tg}x\right)' = -\frac{3}{\cos^2 x}$ **б)** $(\cos x-\operatorname{tg}x)' = -\sin x-\frac{1}{\cos^2 x}$

в) $\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\right)' = \frac{1}{2\cos^2 x}$ **г)** $(2\operatorname{tg}x-\sin x)' = \frac{2}{\cos^2 x}-\cos x$

Ответ: а) $-\frac{3}{\cos^2 x}$; **б)** $-\sin x-\frac{1}{\cos^2 x}$; **в)** $\frac{1}{2\cos^2 x}$; **г)** $\frac{2}{\cos^2 x}-\cos x$

234. а) $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\cos(2x-\pi)\right)' = -\sin(2x-\pi)$

$f'(0) = -\sin(0-\pi) = \sin\pi = 0$; $f'(\pi) = -\sin(2\pi-\pi) = -\sin\pi = 0$

б) $f'(x) = (x-\operatorname{tg}(-2x))' = 1+\frac{2}{\cos^2 2x}$

$f'(0) = 1+\frac{2}{\cos^2 2\cdot 0} = 1+2 = 3$; $f'(\pi) = 1+\frac{2}{\cos^2 2\pi} = 1+\frac{2}{1} = 3$

в) $f'(x) = \left(3\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\right)' = 3\cdot\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$

$f'(0) = \cos\left(0-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

$f'(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

г) $f'(x) = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)' = 2\cdot\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right) = -\sin\frac{x}{2}$; $f'(0) = -\sin 0 = 0$;

$f'(\pi) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$ **Ответ: а)** 0; 0; **б)** 3; 3; **в)** 0; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **г)** 0; –1.

235. а) $f'(x) = \left(\frac{1}{2}x+\cos x\right)' = \frac{1}{2}-\sin x$

$\frac{1}{2}-\sin x = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$

б) $f'(x) = (x-\operatorname{tg}x)' = 1-\frac{1}{\cos^2 x}$

$1-\frac{1}{\cos^2 x} = 0$ О.Д.З. $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$

$\cos^2 x-1 = 0$; $\cos^2 x = 1$; $\cos x = \pm 1$; $x = k\pi$, $k\in Z$

в) $f'(x)=\left(2\sin x-1\right)'=2\cos x$

$2\cos x=0$; $\cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$

г) $f'(x)=\left(x-\cos x\right)'=1+\sin x$

$1+\sin x=0$; $\sin x=-1$; $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$

Ответ: а) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$; **б)** $k\pi$; **в)** $\frac{\pi}{2}+k\pi$; **г)** $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

236. а) $f'(x)=(x^3\cdot\sin 2x)'=3x^2\cdot\sin 2x+2x^3\cdot\cos 2x$

б) $f'(x)=\left(x^4+\mathrm{tg}2x\right)'=4x^3+\frac{2}{\cos^2 2x}$

в) $f'(x)=\left(\frac{\cos 3x}{x}\right)'=\frac{-3\sin 3x\cdot x-\cos 3x}{x^2}=\frac{-3x\sin 3x-\cos 3x}{x^2}$

г) $f'(x)=\left(\frac{x}{\sin x}\right)'=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$

237. а) $\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$

б) $\left(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{-4\cos 2x}{\sin^2 2x}$

в) $(\cos^2 x)'=-2\cos x\cdot\sin x=-\sin 2x$ **г)** $\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)'=0$

238. а) $f'(x)=\left(\cos 2x\cdot\sin x+\sin 2x\cdot\cos x\right)'=$

$=\left(\sin(2x+x)\right)'=\left(\sin 3x\right)'=3\cos 3x$

б) $f'(x)=\left(\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4}\right)'=\left(\cos\left(2\cdot\frac{x}{4}\right)\right)'=\left(\cos\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$

в) $f'(x)=\left(\sin 5x\cdot\sin 3x+\cos 5x\cdot\cos 3x\right)'=$

$=\left(\cos(5x-3x)\right)'=\left(\cos 2x\right)'=-2\sin 2x$

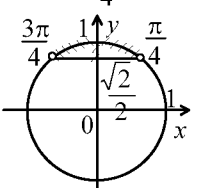
г) $f'(x)=\left(\sin 3x\cdot\cos 3x\right)'=\left(\frac{1}{2}\sin 6x\right)'=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\cos 6x=3\cos 6x$

Ответ: а) $3\cos 3x$; **б)** $-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$; **в)** $-2\sin 2x$; **г)** $3\cos 6x$.

239. а) $f'(x)=\left(2\sin^2 x-\sqrt{2}\cdot x\right)'=4\sin x\cdot\cos x-\sqrt{2}=$

$=2\sin 2x-\sqrt{2}$; $2\sin 2x-\sqrt{2}=0$; $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $2x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+k\pi$

$x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$



$2\sin 2x-\sqrt{2}>0$; $\sin 2x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4}+2k\pi<2x<\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z$

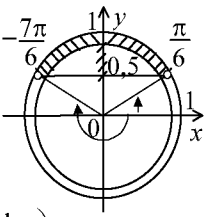
$\frac{\pi}{8}+k\pi<x<\frac{3\pi}{8}+k\pi$, $k\in Z$ **Ответ:** $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$; $\left(\frac{\pi}{8}+k\pi;\ \frac{3\pi}{8}+k\pi\right)$

б) $f'(x)=\left(2x+\cos(4x-\pi)\right)'=2-4\sin(4x-\pi)$

$2-4\sin(4x-\pi)=0$; $\sin(4x-\pi)=\frac{1}{2}$; $4x-\pi=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$;

$4x=\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}, k\in Z$;

$2-4\sin(4x-\pi)>0$; $\sin(4x-\pi)<\frac{1}{2}$



$-\frac{7\pi}{6}+2k\pi<4x-\pi<\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$-\frac{\pi}{6}+2\pi k<4x<\frac{7\pi}{6}+2\pi k$;

$-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{24};\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right)$

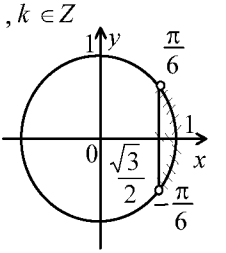
в) $f'(x)=(\cos 2x)'=-2\sin 2x$; $\sin 2x=0$; $2x=k\pi$; $x=\frac{\pi}{2}k, k\in Z$;

$\sin 2x>0$; $\pi+2k\pi<2x<2\pi+2k\pi, k\in Z$; $\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\pi+k\pi, k\in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\pi+k\pi\right)$

г) $f'(x)=\left(\sin 2x-\sqrt{3}x\right)'=2\cos 2x-\sqrt{3}$; $2\cos 2x-\sqrt{3}=0$

$\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi, k\in Z$



$2\cos 2x-\sqrt{3}>0$; $\cos 2x>\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\pi}{6}+2k\pi<2x<\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$-\frac{\pi}{12}+k\pi<x<\frac{\pi}{12}+k\pi$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi;\left(-\frac{\pi}{12}k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

240. Ответ: а) $f(x)=x+\cos x+6$; **б)** $f(x)=\sin 2x-4$;
в) $f(x)=-\sin x-13$; **г)** $f(x)=-3\cos x+5$.

§5 п. 18

241. Ответ: а) непрерывна в x_1 и x_2;
б) непрерывна в $x_1=0$ и не является непрерывной в $x_2=-1$;
в) непрерывна в $x_2=-1$ и не является непрерывной в $x_1=0$;
г) непрерывна в x_1 и x_2.

242. Ответ: а) $(-\infty;\ +\infty)$; **б)** $(-\infty;\ -3)\cup(3;\ 0)\cup(0;\ \infty)$;
в) $(-\infty;\ +\infty)$; **г)** $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ \infty)$.

243. а) $f(x)=1{,}4-10x^2-x^3$ – непрерывна на $[0;\ 1]$

$f(0)=1{,}4$; $f(1)=1{,}4-10-1=-9{,}6$ $f(0)>0$; $f(1)<0$

Следовательно, $f(x)$ пересекает ось OX в точке $(x;\ 0)$, и уравнение имеет корень $x\approx 0{,}3$ на $[0;\ 1]$

б) $f(x)=1+2x^2-100x^4$ – непрерывна на $[0;\ 1]$

$f(0)=1$; $f(1)=1+2-100=-97$ $\qquad f(0)>0$; $f(1)<0$

Следовательно, $f(x)$ пересекает ось OX в точке $(x;\ 0)$, и уравнение имеет корень $x\approx 0{,}3$ на $[0;\ 1]$

в) $x^3-5x+3=0$ $\qquad f(x)=x^3-5x+3$ – непрерывна на $[0;\ 1]$

$f(0)=3$; $f(1)=1-5+3=-1$ $\qquad f(0)>0$; $f(1)<0$

Следовательно, $f(x)$ пересекает ось OX в точке $(x;\ 0)$, и уравнение имеет корень $x\approx 0{,}7$ на $[0;\ 1]$

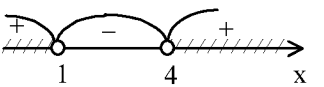
г) $f(x)=x^4+2x-0{,}5$ – непрерывна на $[0;\ 1]$

$f(0)=-0{,}5<0$; $f(1)=1+2-0{,}5=2{,}5>0$

Следовательно, $f(x)$ пересекает ось OX в точке $(x;\ 0)$, и уравнение имеет корень $x\approx 0{,}3$ на $[0;\ 1]$

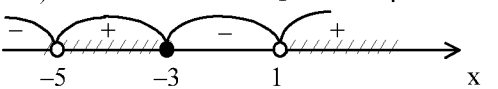
Ответ: а) 0,3; **б)** 0,3; **в)** 0,7; **г)** 0,3.

244.а) $x^2-5x+4>0$; $(x-4)(x-1)>0$



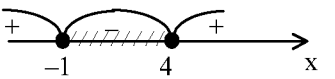
Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup(4;\ \infty)$.

б) $\dfrac{x+3}{x^2+4x-5}\ge 0$



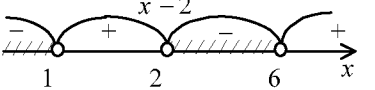
$\dfrac{x+3}{(x+5)(x-1)}\ge 0$ $\qquad$ **Ответ:** $(-5;\ -3]\cup(1;\ \infty)$.

в) $x^2-3x-4\le 0$; $(x-4)(x+1)\le 0$



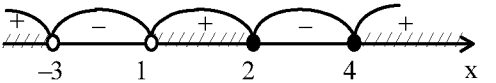
Ответ: $[-1;\ 4]$.

г) $\dfrac{x^2-7x+6}{x-2}<0$; $\dfrac{(x-6)(x-1)}{x-2}<0$; $\dfrac{(x-6)(x-1)}{x-2}<0$



Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup(2;\ 6)$.

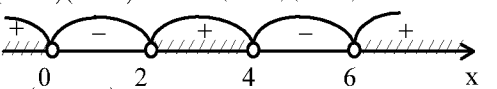
245.а) $\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x+3)(x-1)}\ge 0$



Ответ: $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ 2]\cup[4;\ \infty)$.

б) $\dfrac{8}{(x-4)(x-2)}<1$; $\dfrac{8-(x^2-6x+8)}{(x-4)(x-2)}<0$; $\dfrac{-x^2+6x}{(x-4)(x-2)}<0$

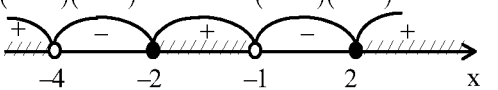
$\dfrac{x(x-6)}{(x-4)(x-2)}>0$



Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ 4)\cup(6;\ +\infty)$.

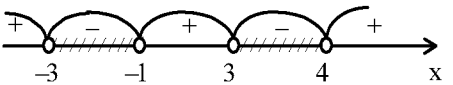
в) $\dfrac{2x^2+5x}{x^2+5x+4}\ge 1$; $\dfrac{2x^2+5x-x^2-5x-4}{(x+4)(x+1)}\ge 0$; $\dfrac{x^2-4}{(x+4)(x+1)}\ge 0$

$\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+4)(x+1)}\ge 0$



Ответ: $(-\infty;\ 4)\cup[-2;\ -1)\cup[2;\ +\infty)$.

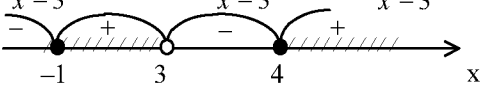
г) $\dfrac{x^2-2x-3}{(x+3)(x-4)}<0$;



$\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-4)}<0$ **Ответ:** $(-3;\ -1)\cup(3;\ 4)$.

246. а) $f(x)=\sqrt{x-\dfrac{4}{x-3}}$ $D(f): x-\dfrac{4}{x-3}\ge 0$ $\dfrac{x^2-3x-4}{x-3}\ge 0$

$\dfrac{(x-4)(x+1)}{x-3}\ge 0$



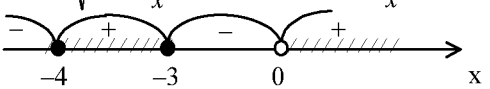
Ответ: $x\in[-1;\ 3)\cup[4;\ \infty)$.

б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2-4}+1}$ $D(f): \dfrac{3}{x^2-4}+1\ge 0$ $\dfrac{3+x^2-4}{x^2-4}\ge 0$

$\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}\ge 0$

Ответ: $x\in(-\infty;\ -2)\cup[-1;\ 1]\cup(2;\ \infty)$

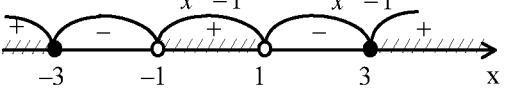
в) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+7x+12}{x}}$; $D(f): \dfrac{x^2+7x+12}{x}\ge 0$; $\dfrac{(x+4)(x+3)}{x}\ge 0$



Ответ: $x\in[-4;\ -3]\cup(0;\ \infty)$

г) $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{8}{x^2-1}}$ $D(f): 1-\dfrac{8}{x^2-1}\ge 0$ $\dfrac{x^2-9}{x^2-1}\ge 0$

$\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+1)}\ge 0$



Ответ: $x\in(-\infty;\ -3]\cup(-1;\ 1)\cup[3;\ +\infty)$.

247. а) $f(4)=4-4=0$, $f(4)=(4-m)^2$; $(4-m)^2=0$; $m=4$

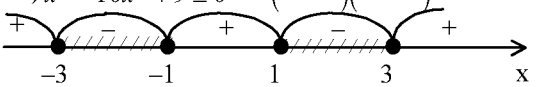
б) $x^2-m>0$ при $m<0$

в) $f(0)=0+2=2$, $f(0)=3\cdot 0+m=m$; $m=2$

г) $x^4+m>0$ при $m>0$

Ответ: а) $m=4$; **б)** $m<0$; **в)** $m=2$; **г)** $m>0$.

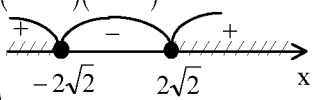
248. а) $x^4-10x^2+9\le 0$ $(x^2-1)(x^2-9)\le 0$



$(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)\le 0$ **Ответ:** $[-3;\ -1]\cup[1;\ 3]$.

б) $x^4-8\ge 7x^2$; $x^4-7x^2-8\ge 0$; $(x^2-8)(x^2+1)\ge 0$

$(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(x^2+1)\ge 0$;

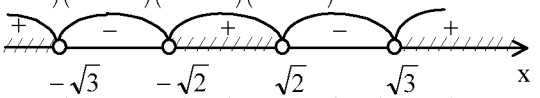


$x^2+1>0$ при любых x

Ответ: $(-\infty;\ -2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2};\ +\infty)$.

в) $x^4-5x^2+6>0$; $\left(x^2-3\right)\left(x^2-2\right)>0$

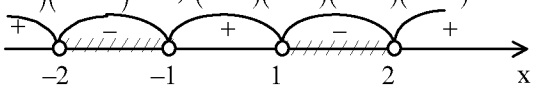
$\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)>0$



Ответ: $\left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{3};\ \infty\right)$

г) $5x^2-4>x^4$; $-x^4+5x^2-4>0$; $x^4-5x^2+4<0$;

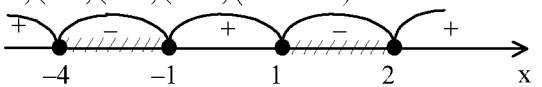
$\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)<0$; $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)<0$



Ответ: $x\in(-2;\ -1)\cup(1;\ 2)$.

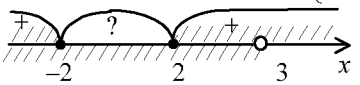
249.а) $\left(x^2-1\right)(x+4)\left(x^3-8\right)\le 0$;

$(x-1)(x+1)(x+4)(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\le 0$



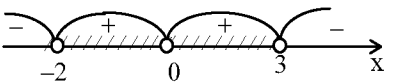
Ответ: $[-4;\ -1]\cup[1;\ 2]$.

б) $\sqrt{x^2-4}\cdot(x-3)<0$ $\quad\begin{cases}x^2-4\ge 0\\ x-3<0\end{cases}$



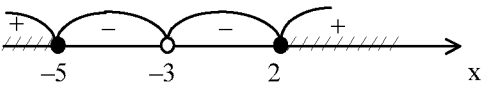
Ответ: $x\in(-\infty;\ -2]\cup[2;\ 3)$.

в) $x^2(3-x)(x+2)>0$



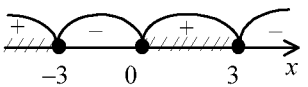
Ответ: $(-2;\ 0)\cup(0;\ 3)$.

г) $\dfrac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^2}\ge 0$



Ответ: $(-\infty;\ -5]\cup[2;\ +\infty)$

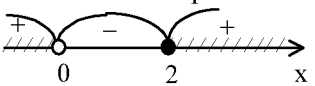
250. а) $D(f)$: $9x-x^3\ge 0$ $\quad x(3-x)(3+x)\ge 0$



Ответ: $x\in(-\infty;\ -3]\cup[0;\ 3]$

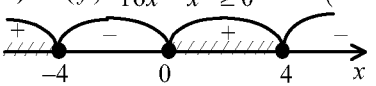
б) $D(f)$: $x^2-\dfrac{8}{x}\ge 0$; $\dfrac{x^3-8}{x}\ge 0$; $\dfrac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x}\ge 0$

$x^2+2x+4>0$ при любых x



Ответ: $x\in(-\infty;\ 0)\cup[2;\ \infty)$

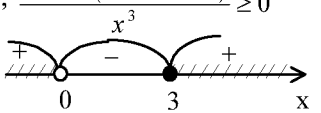
в) $D(f)$: $16x-x^3\ge 0$ $\quad x(4-x)(4+x)\ge 0$



Ответ: $x\in(-\infty;\ -4]\cup[0;\ 4]$

г) $D(f): 1-\frac{27}{x^3}\ge 0$; $\frac{x^3-27}{x^3}\ge 0$; $\frac{(x-3)(x^3+3x+9)}{x^3}\ge 0$

$x^3+3x+9>0$ при любых x



Ответ: $x\in(-\infty;\ 0)\cup[3;\ \infty)$

§5 п. 19

251. Ответ: 1 график: **а)** B; D; **б)** A; E; **в)** C.
2 график: **а)** B; C; D; **б)** E; **в)** A. 3 график: **а)** A; C; E; **б)** B; F **в)** D.
4 график: **а)** A; C; E; **б)** D; **в)** B; F.

252. Ответ: а) $f'(x)=0$; **б)** $f'(x)>0$; **в)** $f'(x)<0$
1 график: **а)** b; d; **б)** c; **в)** a; e. 2 график: **а)** b; d; **б)** a; e; **в)** c.
3 график: **а)** a; b; d; **б)** e; **в)** c. 4 график: **а)** b; d; **б)** c; **в)** a; e.

253. а) $f'(x)=(x^2)'=2x$ $\quad \operatorname{tg}\alpha=f'(-3)=2\cdot(-3)=-6$;

б) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)'=x^2-1$ $\quad \operatorname{tg}\alpha=f'(2)=2^2-1=3$;

в) $f'(x)=(x^3)'=3x^2$ $\quad \operatorname{tg}\alpha=f'(-1)=3\cdot(-1)^2=3$;

г) $f'(x)=(x^2+2x)'=2x+2$ $\quad \operatorname{tg}\alpha=f'(1)=2\cdot 1+2=4$.

Ответ: а) –6; **б)** 3; **в)** 3; **г)** 4.

254. а) $f'(x)=(2\cos x)'=-2\sin x$ $\quad \operatorname{tg}\alpha=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\cdot\sin\frac{\pi}{2}=-2$

б) $f'(x)=(-\operatorname{tg}x)'=-\frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha=f'(\pi)=-\frac{1}{\cos^2\pi}=-1$

в) $f'(x)=(1+\sin x)'=\cos x$ $\quad \operatorname{tg}\alpha=f'(\pi)=\cos\pi=-1$

г) $f'(x)=(-\cos x)'=\sin x$ $\quad \operatorname{tg}\alpha=f'(-\pi)=\sin(-\pi)=0$

Ответ: а) –2; **б)** –1; **в)** –1; **г)** 0.

255. а) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=-\frac{3}{x^2}$; $f'(-1)=-\frac{3}{(-1)^2}=-3$; $f(-1)=\frac{3}{-1}=-3$

$y=-3-3(x-(-1))=-3x-6$ – касательная в точке $x_0=-1$

$f'(1)=-\frac{3}{1^2}=-3$ $\quad f(1)=\frac{3}{1}=3$

$y=3+(-3)(x-1)=-3x+6$ – касательная в точке $x_0=1$

б) $f'(x)=(2x-x^2)'=2-2x$

$f'(0)=2-2\cdot 0=2$ $\quad f(0)=2\cdot 0-0^2=0$

$y=0+2(x-0)=2x$ – касательная в точке $x_0=0$

$f'(2)=2-2\cdot 2=-2$ $\quad f(2)=2\cdot 2-2^2=0$

$y=0+(-2)(x-2)=-2x+4$ – касательная в точке $x_0=2$

в) $f'(x)=(x^2+1)'=2x$

$f'(0)=2\cdot 0=0$ $\quad f(0)=0^2+1=1$

$y=1+0\cdot(x-0)=1$ – касательная в точке $x_0=0$

$f'(1)=2\cdot 1=2$ $\quad f(1)=1^2+1=2$

$y=2+2(x-1)=2x$ – касательная в точке $x_0=1$

г) $f'(x)=\left(x^3-1\right)'=3x^2$

$f'(-1)=3\cdot(-1)^2=3 \qquad f(-1)=(-1)^3-1=-2$

$y=-2+3(x+1)=3x+1$ – касательная в точке $x_0=-1$

$f'(2)=3\cdot 2^2=12 \qquad f(2)=2^3-1=7$

$y=7+12(x-2)=12x-17$ – касательная в точке $x_0=2$

Ответ: а) $y=-3x-6$; $y=-3x+6$; **б)** $y=2x$; $y=-2x+4$;

в) $y=1$; $y=2x$; **г)** $y=3x+1$; $y=12x-17$.

256. а) $f'(x)=(3\sin x)'=3\cos x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\frac{\pi}{2}=0 \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\frac{\pi}{2}=3$

$y=3+0\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=3$ – касательная в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$

$f'(\pi)=3\cos\pi=-3 \qquad f(\pi)=3\sin\pi=0$

$y=0+(-3)(x-\pi)=-3x+3\pi$ – касательная в точке $x_0=\pi$

б) $f'(x)=(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=2 \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$

$y=1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2x-\frac{\pi}{2}+1$ – касательная в точке $x_0=\frac{\pi}{4}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}=4 \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}+4\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=4x+\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$ – касательная в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$

в) $f'(x)=(1+\cos x)'=-\sin x$

$f'(0)=-\sin 0=0 \qquad f(0)=1+\cos 0=2$

$y=2+0(x-0)=2$ – касательная в точке $x_0=0$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1 \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\cos\frac{\pi}{2}=1$

$y=1+(-1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-x+\frac{\pi}{2}+1$ – касательная в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$

г) $f'(x)=(-2\sin x)'=-2\cos x$

$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$

$y=2+0\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2$ – касательная в точке $x_0=-\frac{\pi}{2}$

$f'(\pi)=-2\cos\pi=2 \qquad f(\pi)=-2\sin\pi=0$

$y=0+2(x-\pi)=2x-2\pi$ – касательная в точке $x_0=\pi$

Ответ: а) $y=3$; $y=-3x+3\pi$; **б)** $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$; $y=4x+\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$;

в) $y=2$; $y=-x+\frac{\pi}{2}+1$; **г)** $y=2$; $y=2x-2\pi$.

257. а) $f'(x)=\left(x^3-3x^2+3x\right)'=3x^2-6x+3$

$y \| OX$ при $\operatorname{tg}\alpha=0 \Rightarrow f'(x)=0$

$3x_0^2-6x_0+3=0$; $x_0^2-2x_0+1=0$; $(x_0-1)^2=0$; $x_0=1$

б) $f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^4+16x\right)'=2x^3+16$

$f'(x)=0$; $2x_0^3+16=0$; $x_0^3=-8$; $x_0=-2$

в) $f'(x)=\left(3x^4-6x^2+2\right)'=12x^3-12x$

$f'(x)=0$; $12x_0^3-12x_0=0$; $12x_0\left(x_0^2-1\right)=0$; $x_0=0$, $x_0=\pm1$

г) $f'(x)=\left(x^3-3x+1\right)'=3x^2-3$

$f'(x)=0$; $3x_0^2-3=0$; $x_0^2=1$; $x_0=\pm1$

Ответ: а) $x_0=1$; **б)** $x_0=-2$; **в)** $x_0=0$, $x_0=\pm1$; **г)** $x_0=\pm1$.

258. а) $f'(x)=\left(2\cos x+x\right)'=-2\sin x+1$

$f'(x)=0$; $-2\sin x_0+1=0$; $\sin x_0=\frac{1}{2}$; $x_0=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$

б) $f'(x)=\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cdot x\right)'=2\cos 2x+\sqrt{3}$

$f'(x)=0$; $2\cos 2x_0+\sqrt{3}=0$; $\cos 2x_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x_0=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$; $x_0=\pm\frac{5\pi}{12}+k\pi$, $k\in Z$

в) $f'(x)=\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)'=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$f'(x)=0$; $-\sin\left(x_0-\frac{\pi}{3}\right)=0$; $\sin\left(x_0-\frac{\pi}{3}\right)=0$;

$x_0-\frac{\pi}{3}=k\pi$; $x_0=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$

г) $f'(x)=\left(\sqrt{2}\cdot x-2\sin x\right)'=\sqrt{2}-2\cos x$

$f'(x)=0$; $\sqrt{2}-2\cos x_0=0$; $\cos x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_0=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$

Ответ: а) $x_0=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$; **б)** $x_0=\pm\frac{5\pi}{12}+k\pi$, $k\in Z$;

в) $x_0=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$; **г)** $x_0=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$.

259. а) $3x-x^3=0$; $x\left(3-x^2\right)=0$; $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$

$f'(x)=\left(3x-x^3\right)'=3-3x^2$ $\quad f'(0)=3-3\cdot0=3$, $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\alpha=\operatorname{arctg}3$

$f'\left(\sqrt{3}\right)=3-3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=-6$, $\operatorname{tg}\alpha=-6$, $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}6$

$f'\left(-\sqrt{3}\right)=3-3\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2=-6$, $\operatorname{tg}\alpha=-6$, $\alpha=\pi-\operatorname{arctg}6$

Ответ: $\operatorname{arctg}3$ в точке $(0;\ 0)$; $\pi-\operatorname{arctg}6$ в точках $\left(\sqrt{3};\ 0\right)$; $\left(-\sqrt{3};\ 0\right)$.

б) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$; $x+\frac{\pi}{4}=k\pi$; $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

$f'(x)=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$f'\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(k\pi)=$

$=\begin{cases}1, \text{ если } k=2n\\ -1, \text{ если } k=2n-1,\ n\in Z\end{cases}$ $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ в точках $\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\ 0\right)$; $\frac{3\pi}{4}$ в точках $\left(-\frac{\pi}{4}+(2k-1)\pi;\ 0\right)$.

в) $x^2-3x+2=0$; $x_1=2$, $x_2=1$; $f'(x)=\left(x^2-3x+2\right)'=2x-3$

$f'(2)=2\cdot 2-3=1$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$

$f'(1)=2\cdot 1-3=-1$, $\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ в точке $(2;\ 0)$; $\frac{3\pi}{4}$ в точке $(1;\ 0)$.

г) $-\cos x=0$; $\cos x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$

$f'(x)=(-\cos x)'=\sin x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\begin{cases}1, \text{ если } k=2n\\ -1, \text{ если } k=2n-1,\ n\in Z\end{cases}$

$\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ в точках $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ 0\right)$; $\frac{3\pi}{4}$ в точках $\left(\frac{\pi}{2}+(2k-1)\pi;\ 0\right)$.

260. а) $f'(x)=\left(\frac{1}{x-1}\right)'=-\frac{1}{(x-1)^2}$ $x_0=0$, $f'(0)=-\frac{1}{(0-1)^2}=-1$

$\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ – с осью OX $\beta=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$ – с осью OY

б) $f'(x)=\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)'=\frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

$x_0=0$, $f'(0)=\frac{1}{2\cos^2\left(0-\frac{\pi}{4}\right)}=1$

$\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$ – с осью OX $\beta=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$ – с осью OY

в) $f'(x)=\left(\frac{1}{2}(x-1)^2\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2(x-1)=x-1$

$x_0=0$, $f'(0)=0-1=-1$

$\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ – с осью OX $\beta=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$ – с осью OY

г) $f'(x)=\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right)'=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

$x_0=0$, $f'(0)=2\cos\left(0+\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$ – с осью OX $\quad\beta=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$ – с осью OY

Ответ: а) $\beta=\frac{\pi}{4}$; **б)** $\beta=\frac{3\pi}{4}$; **в)** $\beta=\frac{\pi}{4}$; **г)** $\beta=\frac{5\pi}{6}$.

§5 п. 20

261. $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$

а) $f(x)=x^4+2x$; $x_1=2{,}016$; $x_0=2$, $\Delta x=0{,}016$

$f'(x)=4x^3+2$; $f'(2)=4\cdot8+2=34$; $f(2)=2^4+2\cdot2=20$;

$f(x_1)\approx20+34\cdot0{,}016=20{,}544$; $x_2=0{,}97$; $x_0=1$, $\Delta x=-0{,}03$;

$f'(1)=4\cdot1^3+2=6$; $f(1)=1^4+2\cdot1=3$; $f(x_2)\approx3+6\cdot(-0{,}03)=2{,}82$

б) $f(x)=x^5-x^2$; $f'(x)=5x^4-2x$; $x_1=1{,}995$; $x_0=2$, $\Delta x=-0{,}005$

$f'(2)=5\cdot2^4-2\cdot2=76$; $f(2)=2^5-2^2=28$;

$f(x_1)\approx28+76\cdot(-0{,}005)=27{,}62$; $x_2=0{,}96$; $x_0=1$, $\Delta x=-0{,}04$

$f'(1)=5\cdot1^4-2\cdot1=3$; $f(1)=1^5-1^2=0$; $f(x_2)\approx0+3\cdot(-0{,}04)=-0{,}12$

в) $f(x)=x^3-x$; $f'(x)=3x^2-1$; $x_1=3{,}02$; $x_0=3$, $\Delta x=0{,}02$

$f'(3)=3\cdot3^2=26$; $f(3)=3^3-3=24$;

$f(x_1)\approx24+26\cdot0{,}02=24{,}52$; $x_2=0{,}92$; $x_0=1$, $\Delta x=-0{,}08$

$f'(1)=1^2\cdot3-1=2$; $f(1)=1^3-1=0$; $f(x_2)\approx0+2\cdot(-0{,}08)=-0{,}16$

г) $f(x)=x^2+3x$; $f'(x)=2x+3$; $x_1=5{,}04$; $x_0=5$, $\Delta x=0{,}04$

$f'(5)=2\cdot5+3=13$; $f(5)=5^2+3\cdot5=40$; $f(x_1)\approx40+13\cdot0{,}04=40{,}52$;

$x_2=1{,}98$; $x_0=2$, $\Delta x=-0{,}02$; $f'(2)=2\cdot2+3=7$;

$f(2)=2^2+3\cdot2=10$; $f(x_2)\approx10+7\cdot(-0{,}02)=9{,}86$

Ответ: а) $f(x_1)\approx20{,}544$; $f(x_2)\approx2{,}82$; **б)** $f(x_1)\approx27{,}62$; $f(x_2)\approx-0{,}12$

в) $f(x_1)\approx24{,}52$; $f(x_2)\approx-0{,}16$; **г)** $f(x_1)\approx40{,}52$; $f(x_2)\approx9{,}86$.

262. а) $(1{,}002)^{100}=(1+0{,}002)^{100}\approx1+100\cdot0{,}002=1{,}2$

б) $(0{,}995)^6=(1-0{,}005)^6\approx1+6\cdot(-0{,}005)=1-0{,}03=0{,}97$

в) $(1{,}03)^{200}=(1+0{,}03)^{200}\approx1+200\cdot0{,}03=7$

г) $(0{,}998)^{20}=(1-0{,}002)^{20}\approx1+20\cdot(-0{,}002)=0{,}96$

Ответ: а) 1,2; **б)** 0,97; **в)** 7; **г)** 0,96.

263. а) $\sqrt{1{,}004}=\sqrt{1+0{,}004}\approx1+\frac{1}{2}\cdot0{,}004=1{,}002$

б) $\sqrt{25{,}012}=5\cdot\sqrt{1{,}00048}=5\sqrt{1+0{,}00048}\approx5\left(1+\frac{1}{2}\cdot0{,}00048\right)=$

$=5(1{,}00024)=5{,}0012$

в) $\sqrt{0{,}997}=\sqrt{1+(-0{,}003)}\approx1+\frac{1}{2}\cdot(-0{,}003)=1-0{,}0015=0{,}9985$

г) $\sqrt{4{,}0016} = 2\sqrt{1{,}0004} = 2\sqrt{1+0{,}0004} \approx 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}0004\right) =$

$= 2\cdot 1{,}0002 = 2{,}0004$ **Ответ: а)** 1,002; **б)** 5,0012; **в)** 0,9985; **г)** 2,0004.

264. а) $\operatorname{tg} 44° = ?$ $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 45°$, $\Delta x = -1° = -\frac{\pi}{180} = -0{,}0174$

$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $f'(45°) = \frac{1}{\cos^2 45°} = 2$; $f(45°) = \operatorname{tg} 45° = 1$

$f(45°) \approx 1 + 2(-0{,}074) = 0{,}9652$

б) $\cos 61° = ?$ $f(x) = \cos x$ $x_0 = 60°$, $\Delta x = 1° = 0{,}0174$

$f'(x) = -\sin x$ $f'(60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}866$

$f(60°) = \cos 60° = 0{,}5$ $f(61°) \approx 0{,}5 + (-0{,}866)\cdot 0{,}0174 = 0{,}4849$

в) $\sin 31° = ?$ $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$

$x_0 = 30°$, $\Delta x = 1° = 0{,}0174$ $f(30°) = \sin 30° = 0{,}5$

$f'(30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$ $f(31°) \approx 0{,}5 + 0{,}866\cdot 0{,}0174 = 0{,}5151$

г) $\operatorname{ctg} 47° = ?$ $f(x) = \operatorname{ctg} x$ $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$x_0 = 45°$; $\Delta x = 2° \approx 0{,}0348$ $f(45°) = \operatorname{ctg} 45° = 1$

$f'(45°) = -\frac{1}{\sin^2(45°)} = -2$ $f(47°) \approx 1 + (-2)\cdot 0{,}0348 = 0{,}9304$

Ответ: а) 0,9652; **б)** 0,4849; **в)** 0,5151; **г)** 0,9304.

265. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}04\right) = ?$ $f(x) = \cos x$ $f'(x) = -\sin x$

$x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = 0{,}04$ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}5$ $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}04\right) \approx 0{,}866 - 0{,}5\cdot 0{,}04 = 0{,}846$

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 0{,}02\right) = ?$ $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$

$x_0 = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = -0{,}02$ $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$ $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 0{,}02\right) \approx 0{,}866 + 0{,}5\cdot(-0{,}02) = 0{,}856$

в) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}03\right) = ?$ $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$

$x_0 = \frac{\pi}{6}$; $\Delta x = 0{,}03$ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$ $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}03\right) \approx 0{,}5 + 0{,}866\cdot 0{,}03 = 0{,}52598$

г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}05\right) = ?$; $f(x) = \operatorname{tg} x$; $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $\Delta x = 0{,}05$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}05\right) \approx 1 + 2\cdot 0{,}05 = 1{,}1$

Ответ: а) 0,846; **б)** 0,856 **в)** 0,52598; **г)** 1,1.

266. а) $\frac{1}{1{,}003^{20}} = (1{,}003)^{-20} = (1+0{,}003)^{-20} \approx 1+(-20)\cdot 0{,}003 = 0{,}94$

б) $\frac{1}{0{,}996^{40}} = (0{,}996)^{-40} = (1+(-0{,}004))^{-40} \approx 1+(-40)\cdot(-0{,}004) = 1{,}16$

в) $\frac{1}{2{,}0016^3} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1{,}0008^3} = \frac{1}{8}\cdot(1{,}0008)^{-3} = \frac{1}{8}\cdot(1+0{,}0008)^{-3} \approx$

$\approx \frac{1}{8}\cdot\left(1+(-3)\cdot 0{,}0008\right) = 0{,}1247$

г) $\frac{1}{0{,}994^5} = 0{,}994^{-5} = (1+(-0{,}006))^{-5} \approx 1+(-5)\cdot(-0{,}006) = 1{,}03$

Ответ: а) 0,94; **б)** 1,16; **в)** 0,1247; **г)** 1,03.

§5 п. 21

267. а) $v = x'(t) = \left(-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t\right)' = -t^2 + 4t + 5$ (м/с)

б) $t = 2$ с $\qquad v(2) = -2^2 + 4\cdot 2 + 5 = 9$ (м/с)

в) $v = 0$ м/с $\quad -t^2 + 4t + 5 = 0$; $t^2 - 4t - 5 = 0$; $t_1 = 5$ с; $t_2 = -1 < 0$

Ответ: а) $v = -t^2 + 4t + 5$ (м/с); **б)** 9 м/с; **в)** 5 с.

268. $v = x'(t) = \left(t^3 - 4t^2\right)' = 3t^2 - 8t$ (м/с)

$a = v'(t) = \left(3t^2 - 8t\right)' = 6t - 8$ (м/с^2)

$v(5) = 3\cdot 5^2 - 8\cdot 5 = 35$ (м/с)

$a(5) = 6\cdot 5 - 8 = 22$ (м/с^2) $\qquad$ **Ответ:** 35 м/с; 22 м/с^2.

269. $\omega(t) = \varphi'(t) = \left(3t^2 - 4t + 2\right)' = 6t - 4$ (рад/с)

$\omega(4) = 6\cdot 4 - 4 = 20$ (рад/с) $\qquad$ **Ответ:** $(6t-4)$ рад/с; 20 рад/с.

270. а) $\omega(t) = \varphi'(t) = \left(4t - 0{,}3t^2\right)' = 4 - 0{,}6t$

$\omega(2) = 4 - 0{,}6\cdot 2 = 2{,}8$ рад/с $\qquad$ **Ответ:** 2,8 рад/с;

б) $\omega(t) = 0 \quad 4 - 0{,}6t = 0 \quad t = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$ (с) $\qquad$ **Ответ:** $6\frac{2}{3}$ с.

271. $v(t) = x'(t) = \left(2t^3 + t - 1\right)' = 6t^2 + 1$ (см/с)

$a(t) = v'(t) = \left(6t^2 + 1\right)' = 12t$ (см/с^2) $\qquad$ **Ответ:** $a(t) = 12t$ см/с^2.

а) $a = 1$ см/с^2 $\quad 12t = 1 \quad t = \frac{1}{12}$ с $\qquad$ **Ответ:** $t = \frac{1}{12}$ с;

б) $a = 2$ см/с^2 $\quad 12t = 2 \quad t = \frac{1}{6}$ с $\qquad$ **Ответ:** $t = \frac{1}{6}$ с;

272. $v(t) = x'(t) = \left(-\frac{t^3}{6} + 3t^2 - 5\right)' = -\frac{t^2}{2} + 6t$

$a(t) = v'(t) = \left(-\frac{t^2}{2} + 6t\right)' = -t + 6$

а) $a(t) = 0 \quad -t + 6 = 0 \quad t = 6$ с $\qquad$ **Ответ:** 6 с;

б) $v(6) = -\frac{6^2}{2} + 6\cdot 6 = 18$ м/с $\qquad$ **Ответ:** 18 м/с.

273. $v(t) = x'(t) = \left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$$a(t)=v'(t)=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)'=\frac{-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\left(2\sqrt{t}\right)^2}=-\frac{1}{4\left(\sqrt{t}\right)^3}\qquad a(t)=-2v^3(t)$$

274. $F=ma$ $\quad v(t)=x'(t)=\left(2t^3-t^2\right)'=6t^2-2t$ (м/с)

$a(t)=v'(t)=12t-2$ (м/с^2) $\quad a(2)=12\cdot 2-2=22$ (м/с^2)

$F=22m$ (Н) $\qquad$ **Ответ:** $F=22m$ (Н).

275. $m=2$ кг $\qquad x(t)=t^2+t+1$

$v(t)=x'(t)=\left(t^2+t+1\right)'=2t+1$ (см/с)

$a(t)=v'(t)=\left(2t+1\right)'=2$ (см/с^2) $=0{,}02$ (м/с^2)

а) $F=ma$ $\qquad F=2\cdot 0{,}02=0{,}04$ Н

б) $E_{кин.}=\dfrac{mv^2}{2}$ $\qquad t=2$ с $\qquad v(2)=2\cdot 2+1=5$ см/с $=0{,}05$ м/с

$$E_{кин.}=\frac{2\cdot(0{,}05)^2}{2}=0{,}0025\,\text{Дж}$$

Ответ: а) $F=0{,}04$ Н; **б)** $E_{кин.}=0{,}0025$ Дж.

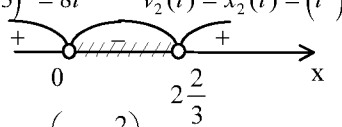
276. $d(l)=m'(l)=\left(3l^2+5l\right)'=6l+5$

а) $l=\dfrac{1}{2}\text{AB}=10$ см $\qquad d(10)=6\cdot 10+5=65$ г/см

б) $l=\text{AB}=20$ см $\qquad d(20)=6\cdot 20+5=125$ г/см

Ответ: а) 65 г/см; **б)** 125 г/см.

277. $v_1(t)=x_1'(t)=\left(4t^2-3\right)'=8t$ $\qquad v_2(t)=x_2'(t)=\left(t^3\right)'=3t^2$

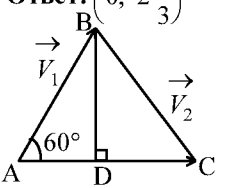


$v_1(t)>v_2(t)$

$8t>3t^2$; $8t-3t^2>0$;

$3t^2-8t<0$; $t(3t-8)<0$; $t\in\left(0;\ 2\frac{2}{3}\right)$ $\qquad$ **Ответ:** $\left(0;\ 2\frac{2}{3}\right)$

278. $V_1=5$ км/ч $=\dfrac{1}{12}$ км/с;



$S_2(t)=2t^2+t$; $S_1(t)=5t$

$\text{AD}=\dfrac{1}{2}\text{AB}=\dfrac{1}{2}S_1$; $\text{DC}=\text{AC}-\text{AD}=S_2-\dfrac{1}{2}S_1$

BC $=S$ – расстояние между I и II материальными телами

$\text{BD}^2=\text{AB}^2-\text{AD}^2$; $\text{BD}^2=\text{BC}^2-\text{DC}^2$; $\text{AB}^2-\text{AD}^2=\text{BC}^2-\text{DC}^2$

$\text{BC}=\sqrt{\text{AB}^2-\text{AD}^2+\text{DC}^2}$ $\qquad \text{BC}=\sqrt{S_1^2-\frac{1}{4}S_1^2+S_2^2-S_1S_2+\frac{1}{4}S_1^2}=$

$=\sqrt{S_1^2-S_1S_2+S_2^2}=\sqrt{\left(S_1-S_2\right)^2+S_1S_2}$

$\text{BC}=\sqrt{\left(5t-2t^2-t\right)^2+5t\cdot\left(2t^2+t\right)}=\sqrt{\left(4t-2t^2\right)^2+5t\left(2t^2+t\right)}=$

$=\sqrt{t^2\cdot\left(16-16t+4t^2+10t+5\right)}=t\cdot\sqrt{4t^2-6t+21}$ при $t>0$

$S = t \cdot \sqrt{4t^2 - 6t + 21}$

$$V(t) = S'(t) = \left(t \cdot \sqrt{4t^2 - 6t + 21}\right)' = \sqrt{4t^2 - 6t + 21} + \frac{t(8t-6)}{2\sqrt{4t^2 - 6t + 21}} =$$

$$= \frac{4t^2 - 6t + 21 + 4t^2 - 3t}{\sqrt{4t^2 - 6t + 21}} = \frac{8t^2 - 9t + 21}{\sqrt{4t^2 - 6t + 21}} \text{ при } t > 0$$

Ответ: $V = \dfrac{8t^2 - 9t + 21}{\sqrt{4t^2 - 6t + 21}}$ при $t > 0$.

§6 п. 22

279. а) $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x \qquad f'(x) = -\frac{1}{2} < 0 \qquad D(f) = R$

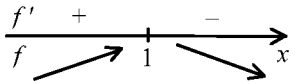
Следовательно, $f(x)$ убывает на всем R.

б) $f(x) = -x^2 + 2x - 3 \qquad D(f) = R \qquad f'(x) = -2x + 2$

$-2x + 2 = 0 \quad x = 1$

$f(x)$ убывает на $[1;\ \infty)$

$f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 1]$.



в) $f(x) = 4x - 5 \qquad D(f) = R \qquad f'(x) = 4 > 0$

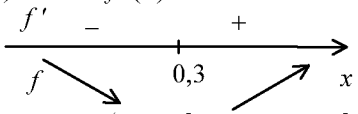
$f(x)$ возрастает на всем R.

г) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1 \qquad D(f) = R \qquad f'(x) = 10x - 3$

$10x - 3 = 0 \quad x = 0{,}3$

$f(x)$ убывает на $(-\infty;\ 0{,}3]$

$f(x)$ возрастает на $[0{,}3;\ \infty)$.



Ответ: а) убывает на R; **б)** возрастает на $(-\infty;\ 1]$, убывает на $[1;\ \infty)$; **в)** возрастает на всем R; **г)** убывает на $(-\infty;\ 0{,}3]$, возрастает на $[0{,}3;\ \infty)$

280. а) $f(x) = -\frac{2}{x} + 1 \qquad D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty) \qquad f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0$

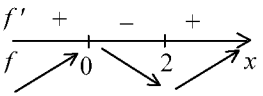
Следовательно, $f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$

б) $f(x) = x^2(x-3) = x^3 - 3x^2 \qquad D(f) = R \qquad f'(x) = 3x^2 - 6x$

$3x^2 - 6x = 0$; $3x(x-2) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 0]$ и $[2;\ \infty)$,

$f(x)$ убывает на $[0;\ 2]$.



в) $f(x) = \frac{x-3}{x}$; $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$; $f'(x) = \frac{x-(x-3)}{x^2} = \frac{3}{x^2} > 0$

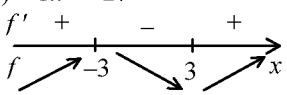
Следовательно, $f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$.

г) $f(x) = x^3 - 27x \qquad D(f) = R \qquad f'(x) = 3x^2 - 27$

$3x^2 - 27 = 0$; $x_{1,2} = \pm 3$

$f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ -3]$, $[3;\ \infty)$

$f(x)$ убывает на $[-3;\ 3]$.



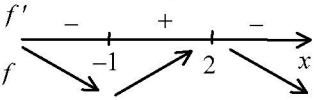
Ответ: а) возрастает на $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$; **б)** возрастает а $(-\infty;\ 0]$ и $[2;\ \infty)$, убывает на $[0;\ 2]$; **в)** возрастает на $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$; **г)** возрастает на $(-\infty;\ -3]$ и $[3;\ \infty)$, убывает на $[-3;\ 3]$.

281. а) $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$ $\quad D(f) = R \quad f'(x) = 12 + 6x - 6x^2$

$12 + 6x - 6x^2 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

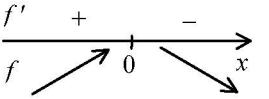
$x_1 = 2\,,\ x_2 = -1$



$f(x)$ убывает на $(-\infty;\ -1]$ и $[2;\ \infty)$; $f(x)$ возрастает на $[-1;\ 2]$.

б) $f(x) = 4 - x^4$ $\quad D(f) = R \quad f'(x) = -4x^3$

$-4x^3 = 0 \quad x = 0$



$f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 0]$;

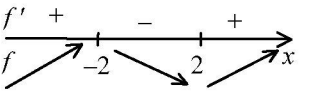
$f(x)$ убывает на $[0;\ \infty)$.

в) $f(x) = x(x^2 - 12) = x^3 - 12x$ $\quad D(f) = R \quad f'(x) = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 12 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x_{1,2} = \pm 2$



$f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ -2]$ и $[2;\ \infty)$; $f(x)$ убывает на $[-2;\ 2]$.

г) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ $\quad D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty) \quad f'(x) = -\dfrac{6}{x^3}$

$x > 0 \quad f'(x) < 0$ – убывает на $(0;\ \infty)$

$x < 0 \quad f'(x) > 0$ – возрастает на $(-\infty;\ 0)$.

Ответ: а) убывает на $(-\infty;\ -1]$ и $[2;\ \infty)$, возрастает на $[-1;\ 2]$;

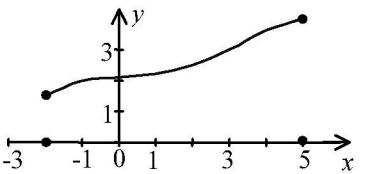
б) возрастает на $(-\infty;\ 0]$, убывает на $[0;\ \infty)$;

в) возрастает на $(-\infty;\ -2]$, $[2;\ \infty)$, убывает на $[-2;\ 2]$;

г) убывает на $(0;\ \infty)$, возрастает на $(-\infty;\ 0)$

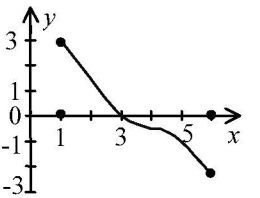
282. а) $D(f) = [-2;\ 5]$,

$f'(x) > 0$ при $x \in (-2;\ 5)$



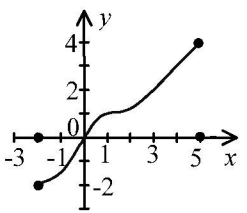
б) $D(f) = [1;\ 6]$, $\ f'(x) < 0$

при $x \in (1;\ 3) \cup (3;\ 6)$, $f'(3) = 0$



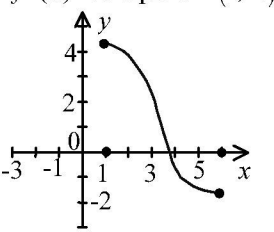
в) $D(f) = [-2;\ 5]$, $f'(x) > 0$

при $x \in (-2;\ 1) \cup (1;\ 5)$, $f'(1) = 0$



г) $D(f) = [1;\ 6]$,

$f'(x) < 0$ при $x \in (1;\ 6)$

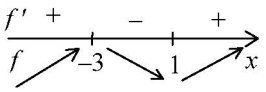


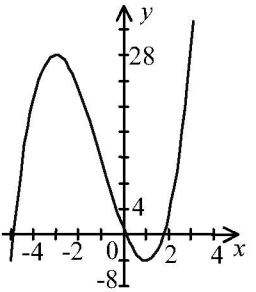
283. а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1 \quad f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 \quad D(f) = R$

$3x^2 + 6x - 9 = 0$; $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x_1 = -3$; $x_2 = 1$

$f(-3) = -27 + 27 + 27 + 1 = 28$

$f(1) = 1 + 3 - 9 + 1 = -4$; $f(0) = 1$





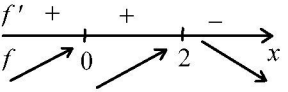
б) $f(x) = 4x^3 - 1{,}5x^4$

$D(f) = R \qquad f'(x) = 12x^2 - 6x^3$

$6x^2(x-2) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$

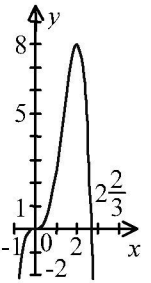
$f(0) = 0$;



$f(2) = 4 \cdot 8 - 1{,}5 \cdot 16 = 32 - 24 = 8$

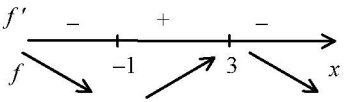
$4x^3 - 1{,}5x^4 = 0$; $x^3(4 - 1{,}5x) = 0$, $x = 0$, $x = 2\frac{2}{3}$

$f(0) = 0$; $f\left(2\frac{2}{3}\right) = 0$



в) $f(x) = 2 + 9x + 3x^2 - x^3 \qquad D(f) = R$

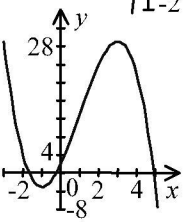
$f'(x) = 9 + 6x - 3x^2 = -3(x-3)(x+1)$



$-3(x-3)(x+1) = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = -1$

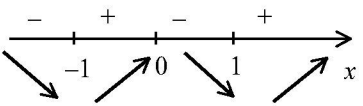
$f(-1) = 2 - 9 + 3 + 1 = -3$

$f(3) = 2 + 27 + 27 - 27 = 29$; $f(0) = 2$



г) $f(x) = x^4 - 2x^2 \qquad D(f) = R$

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1) \qquad 4x(x-1)(x+1) = 0$

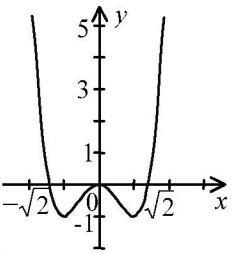


$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

$x^4 - 2x^2 = 0$; $x^2(x^2 - 2) = 0$; $x_1 = 0$

$x_{2,3} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow (0;\ 0)$; $(\sqrt{2};\ 0)$; $(-\sqrt{2};\ 0)$.

$f(1) = 1 - 2 = -1$; $f(-1) = 1 - 2 = -1$



284. а) $f(x) = 2 - \dfrac{4}{0{,}5x - 1}$

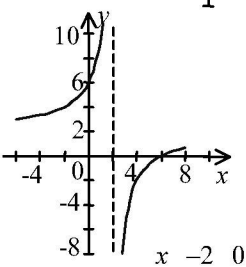
$D(f) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ \infty)$,

$E(f) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ \infty)$

$f'(x) = \dfrac{2}{(0{,}5x-1)^2} > 0$

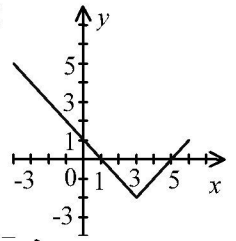
при любых $x \in D(f)$

Следовательно, $f(x)$ возрастает на всей $D(f)$.



x	–2	0	4	6
y	4	6	–2	0

б) $f(x)=|x-3|-2$; $D(f)=R$; $E(f)=[-2;\ \infty)$



$x\ge 3$ $\quad f(x)=x-3-2=x-5$

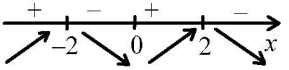
$f'(x)=1>0\Rightarrow f(x)$ возрастает на $[3;\ \infty)$

$x<3$ $\quad f(x)=-x+3-2=-x+1$

$f'(x)=-1<0\Rightarrow f(x)$ убывает на $(-\infty;\ 3]$.

$f(3)=-2$ $\quad f(4)=-1$ $\quad f(2)=-1$

в) $f(x)=8x^2-x^4$



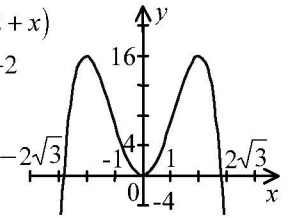
$D(f)=R$, $E(f)=R$

$f'(x)=16x-4x^3=4x(4-x^2)=4x(2-x)(2+x)$

$4x(2-x)(2+x)=0$; $x_1=0$; $x_2=2$; $x_3=-2$

$f(0)=0$, $f(-2)=16$,

$f(2)=16$; $f(\pm 2\sqrt{2})=0$



г) $f(x)=\left|\dfrac{1}{x}-1\right|$

$D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$; $E(f)=[0;\ \infty)$; $x\ge 1$, $x<0$

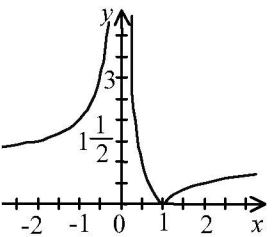
$f(x)=1-\dfrac{1}{x}$; $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}>0\Rightarrow f(x)$ возрастает на $[1;\ \infty)$

и на $(-\infty;\ 0)$ $\quad 0<x<1$

$f(x)=\dfrac{1}{x}-1$;

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0\Rightarrow f(x)$ убывает на $(0;\ 1]$

x	0,5	–0,5	2	–2	1
y	1	3	0,5	1,5	0



285. а) $f(x)=3x+\cos 2x$ $\quad D(f)=R$ $\quad f'(x)=3-2\sin 2x>0$

$|2\sin 2x|\le 2$ Следовательно, $f(x)$ возрастает на всем R.

б) $g(x)=-\dfrac{x^3}{3}-x$ $\quad D(g)=R$

$g'(x)=-x^2-1<0\Rightarrow g(x)$ убывает на всем R.

в) $f(x)=x^7+2x^5+3$, $D(f)=R$

$f'(x)=7x^6+10x^4+3>0\Rightarrow f(x)$ возрастает на всем R. $\quad x^6;x^4\ge 0$

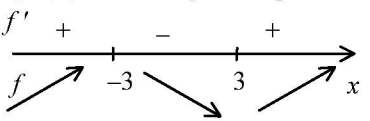
г) $g(x)=-4x+\sin 3x$, $D(g)=R$ $\quad g'(x)=-4+3\cos 3x<0$

$|3\cos 3x|\le 3$ $\quad$ Следовательно, $g(x)$ убывает на всем R.

286. а) $f(x)=x^3-27x+2$, $D(f)=R$

$f'(x)=3x^2-27=3(x-3)(x+3)$ $\quad f'(x)=0$ $\quad x_1=3$; $x_2=-3$

$x\in[-1;\ 1]$



$f(-1)=28>0$; $f(1)=-24<0$

$f(x)$ убывает на $[-3;\ 3]$.

Следовательно, по теореме о корне, уравнение на $P=[-1;\ 1]$ имеет единственный корень. $x\in[4;\ 6]$

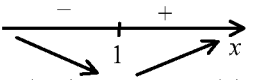
$f(4)=-42<0$; $f(6)=56>0$ $\quad f(x)$ возрастает на $[3;\ \infty)$

Следовательно, уравнение имеет единственный корень на $P=[4;\ 6]$

б) $f(x)=x^4-4x-9$, $D(f)=R$ $\quad f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)$

$4(x^3-1)=0$

$x=1$



1) $x\in[-2;\ 0]$ $\quad f(-2)=15>0$; $f(0)=-9<0$

$f(x)$ убывает на $(-\infty;\ 1]$. Следовательно, уравнение имеет единственный корень на $P=[-2;\ 0]$

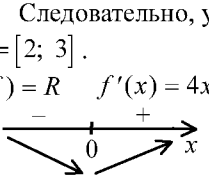
2) $x\in[2;\ 3]$ $\quad f(2)=-1<0$; $f(3)=60>0$

$f(x)$ возрастает на $[1;\ \infty)$. Следовательно, уравнение имеет единственный корень на $P=[2;\ 3]$.

в) $f(x)=x^4+6x^2-8$, $D(f)=R$ $\quad f'(x)=4x^3+12x=4x(x^2+3)$

$4x(x^2+3)=0$; $x=0$

$x\in[-2;\ -1]$



$f(-2)=34>0$; $f(-1)=-1<0$ $\quad f(x)$ убывает на $(-\infty;\ 0]$.

Следоват., уравнение имеет единственный корень на $P=[-2;\ -1]$.

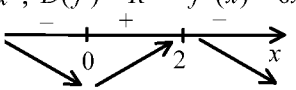
$x\in[1;\ 2]$; $f(1)=-1<0$; $f(2)=34>0$; $f(x)$ возрастает на $[0;\ \infty)$

Следовательно, уравнение имеет единственный корень на $P=[1;\ 2]$

г) $f(x)=-1+3x^2-x^3$, $D(f)=R$ $\quad f'(x)=6x-3x^2=3x(2-x)$

$3x(2-x)=0$

$x_1=0$, $x_2=2$



$x\in[-2;\ 0]$; $f(-2)=19>0$; $f(0)=-1<0$; $f(x)$ убывает на $(-\infty;\ 0]$

$x\in[2;\ 3]$ $\quad f(2)=3>0$; $f(3)=-1<0$ $\quad f(x)$ убывает на $[2;\ \infty)$.

Следовательно, $f(x)$ имеет единственный корень на $P=[2;\ 3]$.

§6 п. 23

287. Ответ: а) x_2; 0; x_3; x_4. **б)** x_2; x_4; 0; x_6; x_7.

288. а) $f'(x)=(4-2x+7x^2)'=-2+14x$ $\quad -2+14x=0$ $\quad x=\dfrac{1}{7}$

б) $f'(x)=(1+\cos 2x)'=-2\sin 2x$ $\quad -2\sin 2x=0$ $\quad x=\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$

в) $f'(x)=(x-2\sin x)'=1-2\cos x$ $\quad 1-2\cos x=0$ $\quad \cos x=\dfrac{1}{2}$

$x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$,

г) $f'(x)=\left(4x-\dfrac{x^3}{3}\right)=4-x^2$ $\quad 4-x^2=0$ $\quad x_{1,2}=\pm 2$

Ответ: а) $x=\dfrac{1}{7}$; **б)** $x=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in Z$;

в) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$; **г)** $x_{1,2}=\pm 2$.

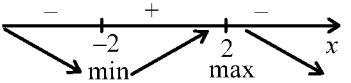
289. Ответ: а) $x_{\max} = x_4\,; x_2\,;\ x_{\min} = x_1\,;\ x_3\,.$

б) $x_{\max} = x_1\,;\ x_3\,;\ x_{\min} = x_2\,;\ x_4\,.$

290. а) $f'(x) = \left(5 + 12x - x^3\right)' = 12 - 3x^2 = 3(2-x)(2+x)$

$3(2-x)(2+x) = 0$

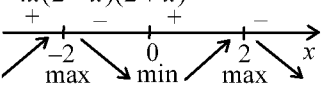
$x_1 = 2\,,\ x_2 = -2$



б) $f'(x) = \left(9 + 8x^2 - x^4\right)' = 16x - 4x^3 = 4x(2-x)(2+x)$

$4x(2-x)(2+x) = 0$

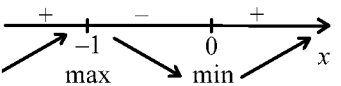
$x_1 = 0\,;\ x_2 = 2\,;\ x_3 = -2$



в) $f'(x) = \left(2x^3 + 3x^2 - 4\right)' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

$6x(x+1) = 0$

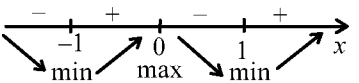
$x_1 = 0\,;\ x_2 = -1$



г) $f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^4 - x^2\right)' = 2x^3 - 2x = (x-1)(x+1)\cdot 2x$

$2x(x-1)(x+1) = 0\,; x_1 = 0\,;$

$x_2 = 1\,;\ x_3 = -1$



Ответ: а) $x_{\min} = -2\,;\ x_{\max} = 2\,;$ **б)** $x_{\max} = -2\,;\ x_{\max} = 2\,;\ x_{\min} = 0\,;$

в) $x_{\max} = -1\,;\ x_{\min} = 0\,;$ **г)** $x_{\min} = -1\,;\ x_{\min} = 1\,;\ x_{\max} = 0\,.$

291. а) $f(x) = \sqrt{x}\,,\ D(f) = [0;\ \infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,;\ f'(x) \neq 0$ ни при каких x; $f'(x)$ не существует при $x = 0$, но эта точка не является внутренней для $[0;\ \infty)$.

б) $f(x) = \operatorname{tg} x \qquad D(f): x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in Z$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ при любых x; $f'(x)$ не существует при $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in Z$, но эта точка не является внутренней точкой для $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

в) $f(x) = 3x - 7 \qquad D(f) = R \qquad f'(x) = 3 \neq 0$ при любых x;

Следовательно, $f(x)$ не имеет критических точек.

г) $f(x) = 3x^5 + 2x \qquad D(f) = R$

$f'(x) = 15x^4 + 2 \neq 0$ при любых x;

Следовательно, $f(x)$ не имеет критических точек.

292. а) $f'(x) = \left(\sin^2 x - \cos x\right)' = 2\sin x\cos x + \sin x \qquad D(f) = R$

$2\sin x\left(\cos x + \dfrac{1}{2}\right) = 0\,; \sin x = 0\,; x = k\pi\,; \cos x = -\dfrac{1}{2}\,; x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$

б) $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x^2} \qquad D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$

$f'(x) = 2 - \dfrac{16}{x^3}\,;\ 2 - \dfrac{16}{x^3} = 0\,;\ 2x^3 - 16 = 0\,;\ x = 2$

в) $f(x)=10\cos x+\sin 2x-6x \qquad D(f)=R$

$f'(x)=-10\sin x+2\cos 2x-6$;

$-10\sin x+2\cos^2 x-2\sin^2 x-6\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0$;

$-10\sin x-8\sin^2 x-4\cos^2 x=0$; $-10\sin x-8\sin^2 x-4+4\sin^2 x=0$;

$4\sin^2 x+10\sin x+4=0$; $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$;

$\sin x=-2<-1$ – не подходит, так как $|\sin x|\le 1$

$\sin x=-\frac{1}{2} \qquad x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$

г) $f'(x)=\left(x^3-4x+8\right)'=3x^2-4 \qquad D(f)=R$

$3x^2-4=0 \qquad x_{1,2}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: а) $x=k\pi$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; **б)** $x=2$;

в) $x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$; **г)** $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

293. а) $f'(x)=\left((x-2)^3\right)'=3(x-2)^2 \qquad D(f)=R$

$3(x-2)^2=0 \qquad x=2$

б) $x\le -1 \qquad f'(x)=-1\ne 0 \qquad -1$ – внутренняя точка $D(f)$

Следовательно, $x=-1$ – критическая точка

$x\in(-1;\ 1) \qquad f'(x)=1\ne 0 \qquad x\ge 1 \qquad f'(x)=-1$

1 – внутренняя точка $D(f)$

Следовательно, $x=1$ – критическая точка.

в) $f'(x)=\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)'=\frac{1}{3}-\frac{3}{x^2} \qquad D(f)\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$

$\frac{1}{3}-\frac{3}{x^2}=0 \qquad x^2-9=0 \qquad x_{1,2}=\pm 3$

г) $f(x)=\begin{cases} x+6 \text{ при } x<-2 \\ x^2 \text{ при } -2\le x\le 2 \\ 6-x \text{ при } x>2 \end{cases} \qquad D(f)=R$

при $x\in[-2;\ 2] \qquad f'(x)=2x$; $x=0$ – критическая точка

$x<-2 \qquad f'(x)=1\ne 0$; $x=-2$ – внутренняя точка $D(f)$

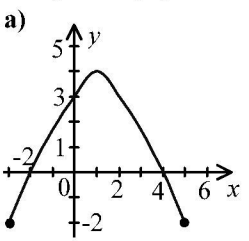
Следовательно, $x=-2$ – критическая точка.

$x>2 \qquad f'(x)=-1\ne 0$; $x=2$ – внутренняя точка $D(f)$

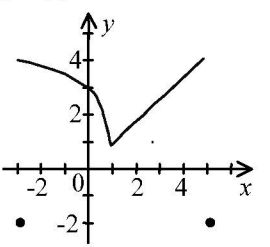
Следовательно, $x=2$ – критическая точка.

Ответ: а) $x=2$; **б)** $x=\pm 1$; **в)** $x=\pm 3$; **г)** $x=0$; $x=\pm 2$.

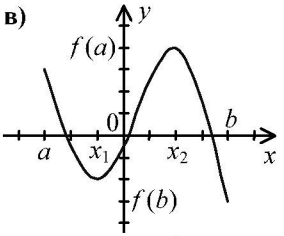
294. а)



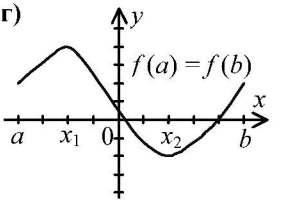
б)



в)



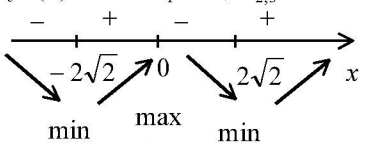
г)

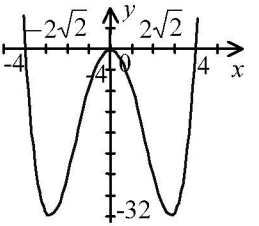


295. а) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-8x^2$ $\qquad D(f)=R$

$f'(x)=2x^3-16x=2x\left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)$

$f'(x)=0 \qquad x_1=0\,,\ x_{2,3}=\pm 2\sqrt{2}$

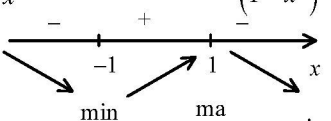




$f\left(\pm 2\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 8^2-8\cdot 8=-32 \qquad f(0)=0 \qquad f(\pm 4)=0$

б) $f(x)=\frac{3x}{1+x^2}$ $\qquad f'(x)=\frac{3\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$

$\frac{3\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}=0$

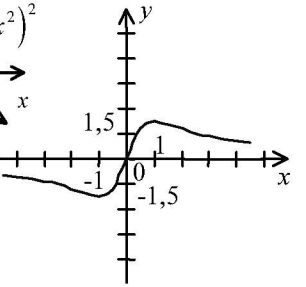


$x_{1,2}=\pm 1$

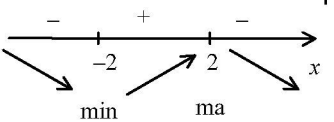
$f(-1)=-1{,}5\,;$

$f(1)=1{,}5\,;$

$f(0)=0\,. \qquad D(f)=R$



в) $f(x)=2x-\frac{1}{6}x^3$



$f'(x)=2-\frac{1}{2}x^2$

$2-\frac{1}{2}x^2=0$

$x^2=4$

$x_{1,2}=\pm 2$

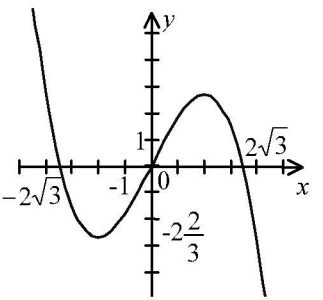
$f(2)=2\frac{2}{3}\,;$

$f(-2)=-2\frac{2}{3}\,;$

$f(0)=0\,;$

$f\left(\pm 2\sqrt{3}\right)=0$

$D(f)=R$



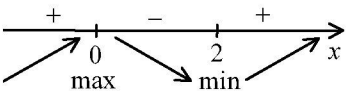
г) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ $\qquad D(f)=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \infty)$

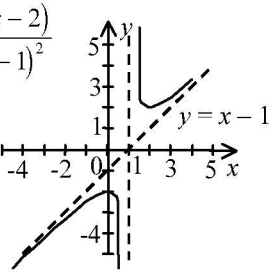
$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$; $x_1=0$; $f(0)=-2$; $f(2)=2$

$x^2-2x+2\neq 0$, так как

$D=1-2=-1<0$





296. а) $f(x)=x^2-2\cdot x+8$

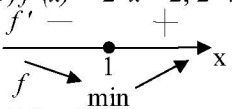
1) $D(f)=R$, $E(f)=[7;+\infty)$

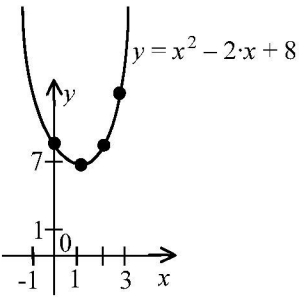
2) не чет., не нечет.

3) $x=0$, $y=8$, $y\neq 0$ т. к. $D<0$

4) $f(x)>0$ на $(-\infty;\infty)$

5) $f'(x)=2\cdot x-2$; $2\cdot x-2=0$, $x=1$





$f(1)=7$; $f(x)$ возрастает на $[1;\infty)$; $f(x)$ убывает на $(-\infty;1]$

6)

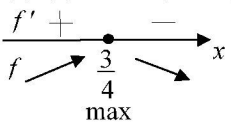
x	2	0	–1	3
y	8	8	11	11

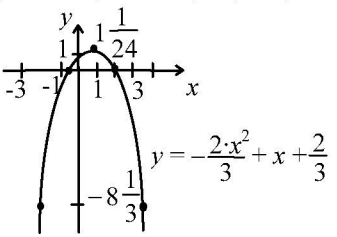
б) $f(x)=\dfrac{2x^2}{3}+x+\dfrac{2}{3}$

1) $D(f)=R$, $E(f)=\left(-\infty;\ 1\dfrac{1}{24}\right]$ $\qquad$ 2) не чет., не нечет.

3) $x=0$, $y=\dfrac{2}{3}$, $y=0$, $x_1=2$, $x_2=-0{,}5$

4) $f(x)>0$ на $(-0{,}5;2)$; $f(x)<0$ на $(-\infty;-0{,}5)$ и $(2;\infty)$





5) $f'(x)=-\dfrac{4x}{3}+1$

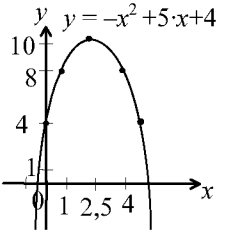
$-\dfrac{4x}{3}+1=0$; $x=\dfrac{3}{4}$

$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=1\dfrac{1}{24}$; $f(x)$ возрастает на $\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right]$; $f(x)$ убывает на $\left[\dfrac{3}{4};\infty\right)$

6)

x	3	–3	4,5	–1,5
y	$-2\frac{1}{3}$	$-8\frac{1}{3}$	$-8\frac{1}{3}$	$-2\frac{1}{3}$

в) $f(x) = -x^2 + 5x + 4$



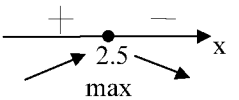
1) $D(f) = R$, $E(f) = (-\infty; 10]$

2) не чет., не нечет.

3) x = 0; y = 4; y = 0 , $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$

4) $f(x) > 0$ на $\left(\frac{5-\sqrt{41}}{2}; \frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)$

$f(x) < 0$ на $\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{41}}{2}\right)$ и $\left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}; \infty\right)$



5) $f'(x) = -2x + 5$; $-2x + 5 = 0$; $x = 2{,}5$; $f(2{,}5) = 10\frac{1}{4}$

$f(x)$ возрастает на $(-\infty; 2{,}5]$; $f(x)$ убывает на $[2{,}5; \infty)$

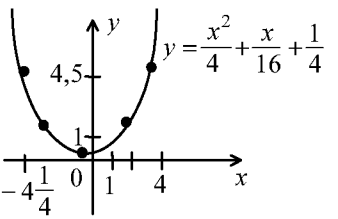
6)

x	1	4	5
y	8	8	4

г) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$ 1) $D(f) = R$, $E(f) = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$

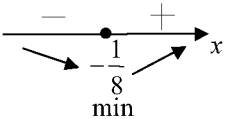
2) не чет., не нечет. 3) x = 0, y = $\frac{1}{4}$, y ≠ 0 т. к. D < 0

4) $f(x) > 0$ на $(-\infty; \infty)$



5) $f'(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$; $\frac{x}{2} + \frac{1}{16} = 0$;

x = $-\frac{1}{8}$



$f(x)$ убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right]$;

$f(x)$ возрастает на $\left[-\frac{1}{8}; \infty\right)$

6)

x	2	4	$-4\frac{1}{4}$
y	$1\frac{3}{8}$	4,5	4,5

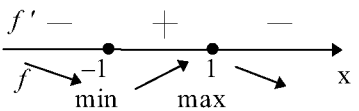
297. а) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

1) $D(f) = R$, $E(f) = R$ 2) не чет., не нечет.

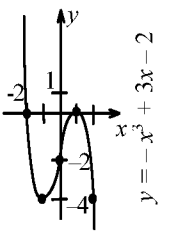
3) x = 0, y = –2, y = 0 $-x^3 + 3\cdot x - 2 = 0$, $x\cdot(x^2 - 1) - 2\cdot(x - 1) = 0$,
$(x - 1)\cdot(x^2 + x - 2) = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$

4) $f(x) > 0$ на $(-\infty; -2)$; $f(x) < 0$ на $(-2; 1)$ и $(1; \infty)$

5) $f'(x) = -3x^2 + 3$; $-3x^2 + 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$



$f(-1) = -4$; $f(1) = 0$



$f(x)$ возрастает на $[-1; 1]$;

$f(x)$ убывает на $(-\infty; -1]$ и $[1; \infty)$ 6)

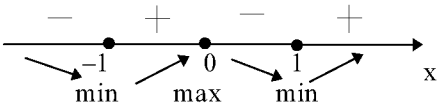
x	2	–3
y	–4	16

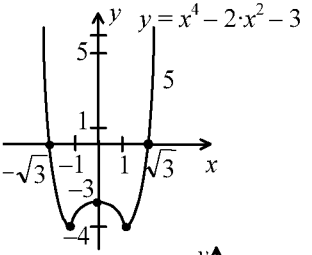
б) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ 1) $D(f) = R$, $E(f) = [-4; +\infty)$

2) четная 3) $x = 0$, $y = -3$, $y = 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

4) $f(x) > 0$ на $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; \infty)$; $f(x) < 0$ на $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

5) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$





$f(-1) = f(1) = -4$; $f(0) = -3$

6)

x	2	–2
y	5	5

в) $f(x) = x^3 + 3x + 2$

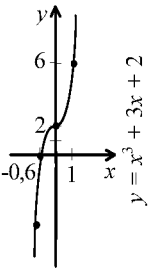
1) $D(f) = R$, $E(f) = R$ 2) не чет., не нечет.

3) $x = 0$, $y = 2$, $y = 0$, $x \approx -0{,}6$

4) $f(x) > 0$ на $(\approx -0{,}6; \infty)$ $f(x) < 0$ на $(-\infty; \approx -0{,}6)$

5) $f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0$

при $x \in R$ $f(x)$ возрастает на всей $D(f)$



6)

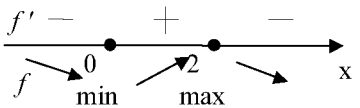
x	–2	1	–1,5	0,5	–1
y	–12	6	$-5\frac{7}{8}$	$3\frac{5}{8}$	–2

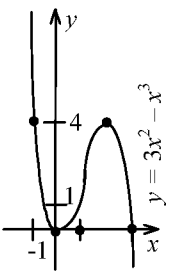
г) $f(x) = 3x^2 - x^3$ 1) $D(f) = R$, $E(f) = R$

2) не чет., не нечет. 3) $x = 0$, $y = 0$, $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

4) $f(x) > 0$ на $(-\infty; 0)$ и $(0; 3)$; $f(x) < 0$ на $(3; \infty)$

5) $f'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$





$f(0) = 0$; $f(2) = 4$

6)

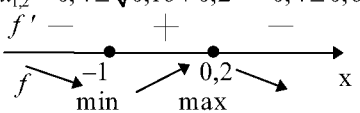
x	4	–1
y	–16	4

298. а) $f(x)=1+1{,}5\cdot x-3x^2-25x^3$

$f'(x) = 1{,}5 - 6x - 7{,}5x^2 = 7{,}5(x - 0{,}2)\cdot(x+1);;$

$1{,}5 - 6\cdot x - 7{,}5x^2 = 0; x^2 + 0{,}8x - 0{,}2 = 0;$

$x_{1,2} = 0{,}4 \pm \sqrt{0{,}16 + 0{,}2} = -0{,}4 \pm 0{,}6; x_1 = 0{,}2; x_2 = -1$

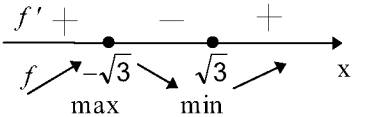


Ответ: $f(x)$ возрастает на $[-1; 0{,}2]$; $f(x)$ убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0{,}2; \infty)$.

б) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 6x + 1$;

$f'(x) = x^4 - x^2 - 6 = (x^2 - 3)(x^2 + 2) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 2)$

$x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$



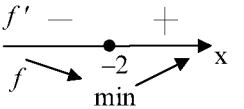
Ответ:

$f(x)$ возрастает на $(-\infty; -\sqrt{3}]$ и $[\sqrt{3}; \infty)$; $f(x)$ убывает на $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

в) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x - 5$; $f'(x) = x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; $x = -2$

Ответ: $f(x)$ возрастает на $[-2; \infty)$;

$f(x)$ убывает на $(-\infty; -2]$



г) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 2$

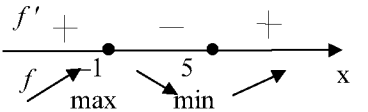
$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x - 5)(x - 1)$

$x_1 = 5$, $x_2 = -1$

Ответ:

$f(x)$ возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[5; \infty)$

$f(x)$ убывает на $[-1; 5]$



299. а) $f(x) = 2x - \cos(x)$; $f'(x) = 2 + \sin(x)$; $|\sin(x)| \le 1$

Следовательно, $f'(x) > 0$ при $x \in R$.

Отсюда: $f(x)$ возрастает на множестве R.

б) $f(x) = x^5 + 4x$ $\quad f'(x) = 5x4 + 4 > 0$ при $x \in R$.

Следовательно, $f(x)$ возрастает на множестве R.

в) $f(x) = \sin(x) + \frac{3x}{2}$; $f'(x) = \cos(x) + \frac{3}{2}$; $|\cos(x)| \le 0$

Следовательно, $f'(x) > 0$ при $x \in R$.

Значит, $f(x)$ возрастает на множестве R.

г) $f(x) = 2x^3 + x - 5$ $\quad f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$ при любом $x \in R$.

Следовательно, $f(x)$ возрастает на множестве R.

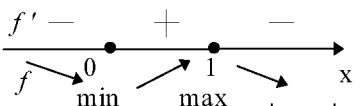
300. а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$ $\quad$ 1) $D(f) = R$, $E(f) = R$

2) не чет., не нечет. $\quad$ 3) $x = 0$, $y = 0$, $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{2,5}$

4) $f(x) > 0$ на $(-\infty; 0)$ и $(0; \sqrt[3]{2,5})$

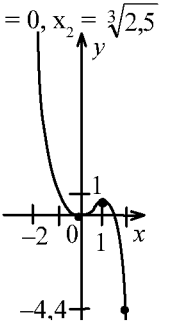
$f(x) < 0$ на $(\sqrt[3]{2,5}; \infty)$

5) $f'(x) = x - x^4 = x(1 - x)(x^2 + x + 1)$



$f(0) = 0$; $f(1) = 0,3$ $\quad$ 6)

x	−1	2	−2
y	0.7	−4.4	−8.4



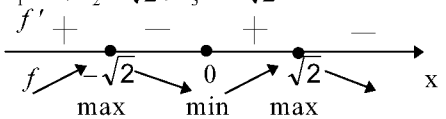
б) $f(x) = 4x^2 - x^4$ 1) $D(f) = R$, $E(f) = [4; -\infty)$

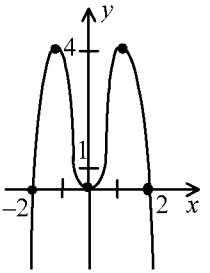
2) четная 3) $x = 0$, $y = 0$, $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$

4) $f(x) > 0$ на $(-2; 0)$ и $(0; 2)$ $f(x) < 0$ на $(-\infty; -2)$ и $(2; \infty)$

5) $f'(x) = 8x - 4x^3 = -4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

$x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$





$f(0) = 0$, $f(\sqrt{2}) = 8 - 4 = 4$, $f(-\sqrt{2}) = 4$

6)

x	2.5	–2.5	2.1	–2.1
y	–14	–14	–1.8	–1.8

в) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3$ 1) $D(f) = R$, $E(f) = R$

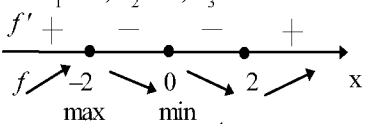
2) нечетная 3) $x = 0$, $y = 0$, $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3} \approx \pm 2.6$

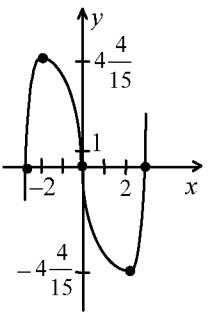
4) $f(x) > 0$ на $\left(-\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3}; 0\right)$ и $\left(\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3}; \infty\right)$

$f(x) < 0$ на $\left(-\infty; -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{3}\right)$ и $\left(0; \frac{2\cdot\sqrt{5}}{3}\right)$

5) $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x - 2)(x + 2)$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$





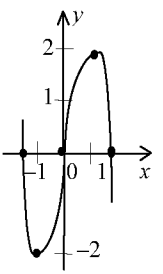
$f(0) = 0$, $f(-2) = 4\frac{4}{15}$, $f(2) = -4\frac{4}{15}$

г) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ 1) $D(f) = R$, $E(f) = R$ 2) нечетная

3) $x = 0$; $y = 0$; $y = 0$; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \approx \pm 1.3$

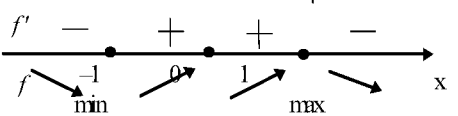
4) $f(x) > 0$ на $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ и $\left(0; \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

$f(x) < 0$ на $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; 0\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}; \infty\right)$



5) $f(x) = 15x^2 - 15x^4 = 15x^2(1 - x)(1 + x)$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$



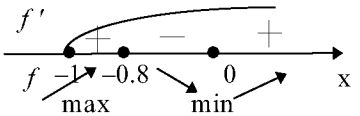
$f(-1) = -2$, $f(1) = 2$

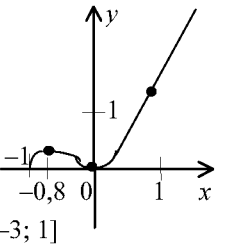
301. а) $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$ 1) $D(f) = [-1; \infty)$; $E(f) = [0; \infty)$

2) не нечет., не чет. 3) $x = 0$, $y = 0$, $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$

4) $f(x) \ge 0$ на $[-1;\infty) \cup (0;\infty)$

5) $f'(x) = 2\cdot x\cdot\sqrt{x+1} + \dfrac{x^2}{2\cdot\sqrt{1+x}} = \dfrac{4\cdot x\cdot(x+1)+x^2}{2\cdot\sqrt{1+x}} = \dfrac{5\cdot x^2+4\cdot x}{2\cdot\sqrt{1+x}}$





$f(-0.8) \approx 0.3$ 6)

x	1	3
y	$\sqrt{2}$	18

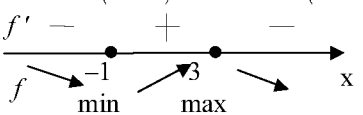
б) $f(x) = \dfrac{6\cdot(x-1)}{x^2+3}$ 1) $D(f) = R$, $E(f) = [-3; 1]$

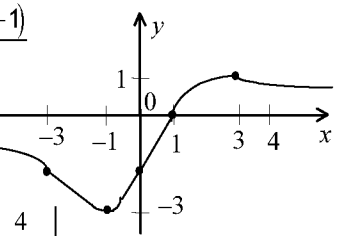
2) не чет., не нечет. 3) $x = 0$, $y = -2$; $y = 0$, $x = 1$

4) $f(x) > 0$ на $(1;\infty)$; $f(x) < 0$ на $(-\infty;1)$

5) $f'(x) = \dfrac{6\cdot(x^2+3)-12\cdot x\cdot(x-1)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{18+12\cdot x-6\cdot x^2}{(x^2+3)^2} =$

$= \dfrac{-6\cdot(x^2-2\cdot x-3)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-6\cdot(x-3)\cdot(x+1)}{(x^2+3)^2}$





$f(-1) = -3$; $f(3) = 1$ 6)

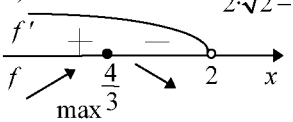
x	–3	4
y	–2	$\dfrac{18}{19}$

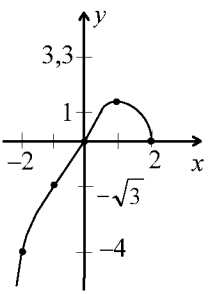
в) $f(x) = x\cdot\sqrt{2-x}$ 1) $D(f) = (-\infty;2]$, $E(f) = (-\infty; 1{,}1)$

2) не нечет., не чет. 3) $x = 0$, $y = 0$, $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

4) $f(x) > 0$ на $(0;2)$; $f(x) < 0$ на $(-\infty;0)$

5) $f'(x) = \sqrt{2-x} - \dfrac{x}{2\cdot\sqrt{2-x}} = \dfrac{4-2\cdot x-x}{2\cdot\sqrt{2-x}} = \dfrac{4-3\cdot x}{2\cdot\sqrt{2-x}}$



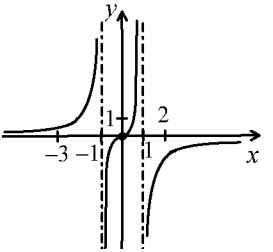


$f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{4\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4\cdot\sqrt{6}}{9} \approx 1{,}1$

6)

x	–2	–1
y	–4	$-\sqrt{3}$

г) $f(x)=\dfrac{2\cdot x}{1-x^2}$



1) $D(f)=(-\infty;-1)\cup(1;\infty)\cup(-1;1)$

$E(f)=R$

2) нечетная

3) x = 0, y = 0

4) $f(x)>0$ на $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$

$f(x)<0$ на $(-1;0)$ и $(1;\infty)$

5) $f'(x)=\dfrac{2\cdot(1-x^2)+2\cdot x\cdot 2\cdot x}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2\cdot x^2+2}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2\cdot(x^2+1)}{(1-x^2)^2}>0$

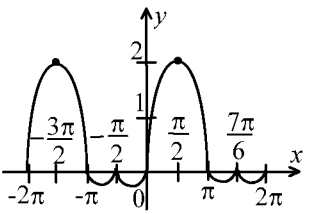
Следовательно, $f(x)$ возрастает на всей $D(f)$.

6)

x	2	–2	1.5	–1.5	0.5	–0.5	3	–3
y	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	–2.4	2.4	1.3	–1.3	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

302. а) $f(x)=\sin^2(x)+\sin(x)$

1) $D(f)=R,\ E(f)=\left[-\frac{1}{4};2\right]$



2) не чет. , не нечет.

3) x = 0 , y = 0, y = 0 ,

$x_1=k\cdot\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi\cdot k,\ k\in Z$

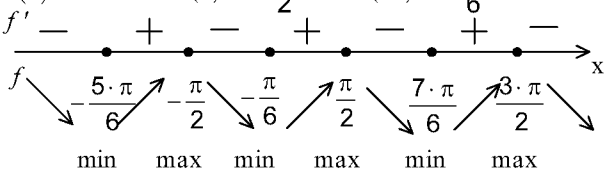
4) $f(x)>0$ на $(2\cdot k\cdot\pi;\pi+2\cdot k\cdot\pi)$

$f(x)\le 0$ на $[-\pi+2\cdot k\cdot\pi;2\cdot k\cdot\pi]$

5) $f'(x)=2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)+\cos(x)=\cos(x)\cdot(2\cdot\sin(x)+1)$

$\cos(x)\cdot(2\cdot\sin(x)+1)=0 \qquad \cos(x)=0 \quad x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ k\in Z$

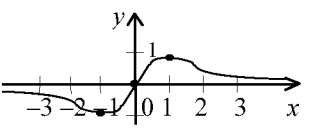
$2\cdot\sin(x)=-1 \qquad \sin(x)=-\frac{1}{2} \quad x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi,\ k\in Z$



$f\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi\cdot k\right)=2;\ f\left(-\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi\cdot k\right)=0$

$f\left(-\frac{\pi}{6}+2\cdot\pi\cdot k\right)=-\frac{1}{4};\ f\left(-\frac{5\cdot\pi}{6}+2\cdot\pi\cdot k\right)=-\frac{1}{4}$

б) $f(x)=\dfrac{2\cdot x}{1+x^2}$

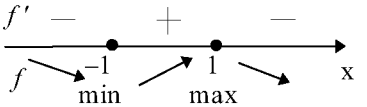


1) $D(f) = R$, $E(f) = [-1; 1]$

2) нечетная 3) x = 0, y = 0

4) $f(x) > 0$ на $(0;\infty)$; $f(x) < 0$ на $(-\infty;0)$

5) $$f'(x) = \frac{2\cdot(1+x^2) - 4\cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2 - 2\cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2\cdot(1-x)\cdot(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

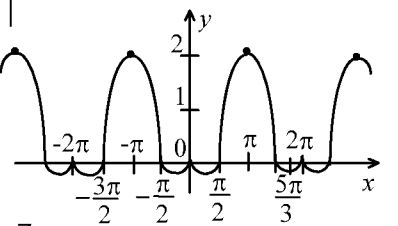


$f(-1) = -1; f(1) = 1$

6)

x	2	–2	3	–3
y	0.8	–0.8	0.6	–0.6

в) $f(x) = \cos^2(x) - \cos(x)$



1) $D(f) = R$, $E(f) = \left[-\frac{1}{4};2\right]$

2) четная

3) x = 0 , y = 0, y = 0 ,

$x_1 = 2\cdot k\cdot\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi\cdot k$, $k \in Z$

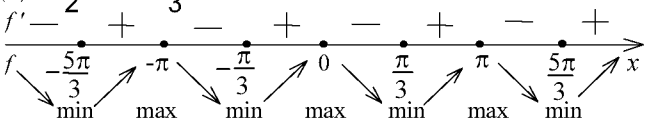
4) $f(x) > 0$ на $\left(\frac{\pi}{2} + 2\cdot k\cdot\pi; \frac{3\cdot\pi}{2} + 2\cdot k\cdot\pi\right)$

$f(x) \le 0$ на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\cdot k\cdot\pi; \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\right]$

5) $f'(x) = -2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x) - \sin(x) = -\sin(x)\cdot(2\cdot\cos(x) - 1)$

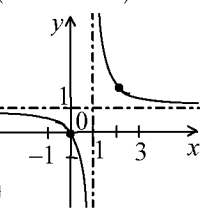
$-\sin(x)\cdot(2\cdot\cos(x) - 1) = 0$; $\sin(x) = 0$; $x = k\cdot\pi$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\cdot k\cdot\pi$, $k \in Z$



$f\left(\frac{\pi}{3} + 2\cdot\pi\cdot k\right) = -\frac{1}{4}$; $f\left(\frac{5\pi}{3} + 2\cdot\pi\cdot k\right) = -\frac{1}{4}$; $f(\pi + 2\cdot\pi\cdot k) = 2$

г) $f(x) = \frac{x}{x-1}$



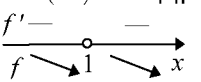
1) $D(f) = (-\infty;1)\cup(1;\infty)$; $E(f) = (-\infty;1)\cup(1;\infty)$

2) не чет., не нечет.

3) x = 0, y = 0

4) $f(x) > 0$ на $(-\infty;0)$ и $(1;\infty)$; $f(x) < 0$ на $(0;1)$

5) $$f'(x) = \frac{x - 1 - x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$



6)

x	2	–1	0	0.5	–0.5	1.5	3
y	2	0.5	0	–1	$\frac{3}{4}$	3	1.5

303. а) $f(x) = \mathrm{tg}(x) - x \qquad I = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \mathrm{tg}^2(x) > 0 \text{ при } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Следовательно, функция возрастает на I и принимает положительные значения.

б) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$, $I = [1; \infty)$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} > 0$ при $x \in [1; \infty)$

$f(x)$ возрастает на I. $f(1) = 0$ – наименьшее значение

в) $f(x) = x - \sin(x)$, $\qquad I = (0; \infty) \qquad f'(x) = 1 - \cos(x)$

$|\cos(x)| \le 1 \Rightarrow 1 - \cos(x) \ge 0$ Следовательно, $f(x)$ возрастает на I.

г) $f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \cos(x)$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \qquad f'(x) = 1 + \sin(x)$

$|\sin(x)| \le 1 \Rightarrow 1 + \sin(x) \ge 0$ Следовательно, $f(x)$ возрастает на I.

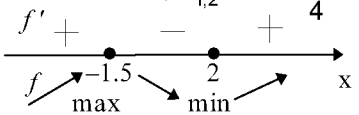
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ – наибол. значение. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ – наимен. значение

304. а) $4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x - 10 = 0$

$f(x) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 36 \cdot x - 10 \qquad D(f) = R$

$f'(x) = 12x^2 - 6x - 36 = 6(2x^2 - x - 6) = 6(x-2)(x+15)$

$2 \cdot x^2 - x - 6 = 0$; $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$; $x_1 = 2$, $x_2 = -1.5$



$f(-1{,}5) = 23{,}25 > 0$; $f(2) = -62 < 0$; $f(-10) = -3930 < 0$; $f(10) = 3330 > 0$

на $(-\infty; -1{,}5]$ функция возрастает от $-\infty$ до 23,25 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $(-\infty; -1{,}5]$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

на $[-1{,}5; 2]$ функция убывает от 23,75 до $-62 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $[-1{,}5; 2]$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

на $[2; \infty)$ функция возрастает от -62 до ∞ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $[2; \infty)$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

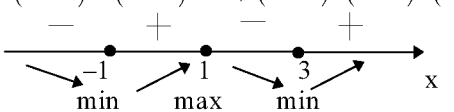
Ответ: уравнение имеет 3 корня.

б) $\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x = 0$

$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x$; $D(f) = R$, $E(f) = \left[-2\frac{1}{4}; \infty\right)$

$f'(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 - x + 3$; $x^3 - 3 \cdot x^2 - x + 3 = 0$;

$x^2 \cdot (x-3) - (x-3) = 0$; $(x-3) \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0$



$x_1 = 3;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1$ $\qquad f(-1) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3 = -2\frac{1}{4} < 0$

$f(1) = \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 = 1\frac{3}{4} > 0;\ f(3) = \frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9 = \frac{63}{4} - 18 = -2\frac{1}{4} < 0$

на $(-\infty;-1]$ функция убывает от ∞ до $-2\frac{1}{4} \Rightarrow$ на $(-\infty;-1]$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

на $[-1;1]$ функция возрастает от $-2\frac{1}{4}$ до $1\frac{3}{4} \Rightarrow$ на $[-1;1]$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

на $[1;3]$ функция убывает от $1\frac{3}{4}$ до $-2\frac{1}{4} \Rightarrow$ на $[1;3]$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

на $[3;\infty)$ функция возрастает от $-2\frac{1}{4}$ до $\infty \Rightarrow$ на $[3;\infty)$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

Ответ: уравнение имеет 4 корня.

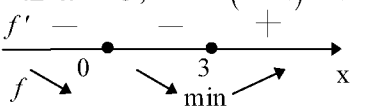
в) $x^4 - 4 \cdot x^3 - 9 = 0$ $\qquad f(x) = x^4 - 4 \cdot x^3 - 9$ $\qquad D(f) = R$

$f'(x) = 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2;\ 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 = 0;\ 4 \cdot x^2 \cdot (x - 3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 3$

$f(0) = -9$

$f(3) = -36$



на $(-\infty;-0]$ функция убывает от ∞ до $-9 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $(-\infty;-0]$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

на $[0;3]$ функция убывает от -9 до $-36 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $[0;3]$ уравнение не имеет корней (по теореме о корне)

на $[3;\infty)$ функция возрастает от -36 до $\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $[3;\infty)$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

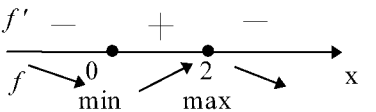
Ответ: уравнение имеет 2 корня.

г) $x^2 - \frac{x^3}{3} - 1 = 0$ $\qquad f(x) = x^2 - \frac{x^3}{3} - 1$ $\qquad D(f) = R$

$f'(x) = 2 \cdot x - x^2 = x \cdot (2 - x)$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$ $\qquad f(0) = -1$

$f(2) = 4 - \frac{8}{3} - 1 = \frac{1}{3}$



$f(-3) = 9 + 9 - 1 = 17;\quad f(3) = 9 - 9 - 1 = -1$

на $(-\infty;0]$ функция убывает от ∞ до $-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $(-\infty;0]$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

на $[0;2]$ функция возрастает от -1 до $\frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $[0;2]$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

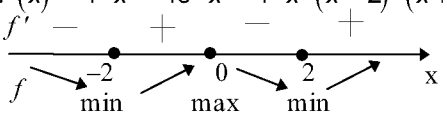
на $[2;\infty)$ функция убывает от $\frac{1}{3}$ до $-\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $[2;\infty)$ уравнение имеет 1 корень (по теореме о корне)

Ответ: уравнение имеет 3 корня.

305. а) $f(x) = x^4 - 8\cdot x^2 - 9$

$f'(x) = 4\cdot x^3 - 16\cdot x = 4\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$



$f(0) = -9$; $f(-2) = -25$; $f(2) = -25$

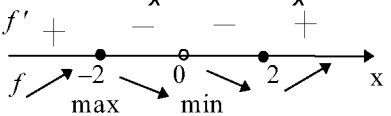
Ответ:

$\max[-1;1]f(x) = f(0) = -9$; $\min[-1;1]f(x) = f(-1) = f(1) = -16$

$\max[0;3]f(x) = f(3) = 0$; $\min[0;3]f(x) = f(2) = -25$

б) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ $\qquad D(f) = (-\infty;0)\cup(0;\infty)$

$$f'(x) = \frac{2\cdot x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^2}$$



$f(-2) = -4$ $\qquad f(2) = 4$

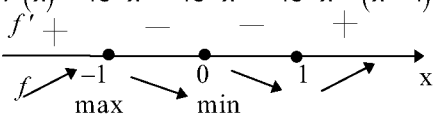
Ответ:

$\max[-4;-1]f(x) = f(-2) = -4$; $\min[-4;-1]f(x) = f(-4) = f(-1) = -5$

$\max[1;3]f(x) = f(1) = 5$; $\min[1;3]f(x) = f(2) = 4$

в) $f(x) = 3\cdot x^5 - 5\cdot x^3$ $\qquad D(f) = R$

$f'(x) = 15\cdot x^4 - 15\cdot x^2 = 15\cdot x^2\cdot(x-1)\cdot(x+1)$



$f(-1) = 2$; $f(1) = -2$; $f(0) = 0$

Ответ: $\max[0;2]f(x) = f(2) = 56$; $\min[0;2]f(x) = f(1) = -2$

$\max[2;3]f(x) = f(3) = 594$; $\min[2;3]f(x) = f(2) = 56$

г) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ $\qquad D(f) = (-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$

$f'(x) = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ при $x \in D(f)$

$f(x)$ возрастает на $D(f)$

Ответ: $\min[-3;-2]f(x) = f(-3) = 1.5$; $\max[-3;-2]f(x) = f(-2) = 2$

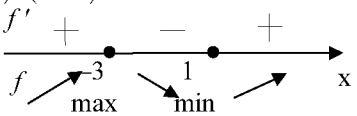
$\min[1;5]f(x) = f(1) = 0.5$; $\max[1;5]f(x) = f(5) = \dfrac{5}{6}$

306. а) $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 9 \cdot x \qquad D(f) = R$

$f'(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 9 = 3 \cdot (x+3) \cdot (x-1)$

$f(-3) = 27$

$f(1) = -5$



$\max[-4;0] f(x) = f(-3) = 27$

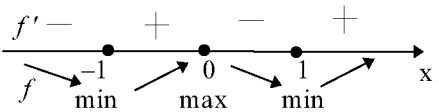
$\min[3;4] f(x) = f(3) = 27$ **Ответ:** $\max[-4;0] f(x) = \min[3;4] f(x)$

б) $f(x) = x^4 - 2 \cdot x^2 + 4 \qquad D(f) = R$

$f'(x) = 4 \cdot x^3 - 4 \cdot x = 4 \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$

$f(0) = 4$

$f(-1) = 3; f(1) = 3$



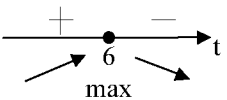
$\max\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] f(x) = f(0) = 4$

$\min[2;3] f(x) = f(2) = 12$ **Ответ:** $\max\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] f(x) < \min[2;3] f(x)$

307. $S(t) = 12 \cdot t^2 - \frac{2}{3} \cdot t^3 \qquad t \in [4;10]$

$v(t) = S'(t) = 24 \cdot t - 2 \cdot t^2$

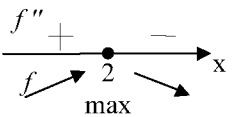
$v'(t) = 24 - 4 \cdot t = 4 \cdot (6 - t)$



$\max[4;10] v(t) = v(6) = 24 \cdot 6 - 2 \cdot 36 = 72 м/с$

Ответ: $t = 6$ с, $v(6) = 72$ м/с

308. $f(x) = 21 \cdot x + 2 \cdot x^2 - \frac{x^3}{3} \qquad x \in [-2;5]$

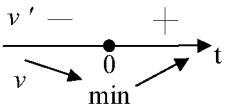


$f'(x) = 21 + 4 \cdot x - x^2; \; f''(x) = 4 - 2 \cdot x$

Ответ: $\min[-2;5] f'(x) = f'(-2) = 9$; $\max[-2;5] f'(x) = f'(2) = 25$

309. $v(t) = \frac{1}{6} \cdot t^3 - 12 \cdot t \qquad t \in [10;50]$

$a(t) = v'(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 - 12; \; a'(t) = t$



$\min[10;50] a(t) = a(10) = 50 - 12 = 38$

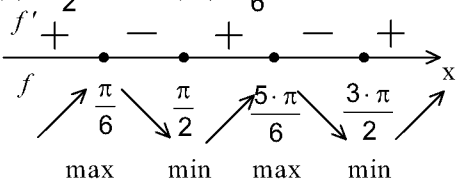
Ответ: $t = 10$ с

310. а) $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + \cos(2 \cdot x) \qquad x \in [0;2 \cdot \pi]$

$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \cos(x) \cdot (1 - 2 \cdot \sin(x))$

$\cos(x) = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

$\sin(x) = \frac{1}{2} \qquad x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, \; k \in Z$



$$f(0) = f(2\cdot\pi) = 1;\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;\ f\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = -3$$

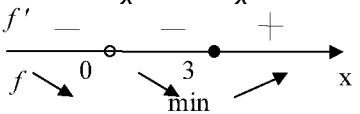
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.5;\ f\left(\frac{5\cdot\pi}{6}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.5$$

Ответ: $\max[0;2\cdot\pi] f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\cdot\pi}{6}\right) = 1.5$

$\min[0;2\cdot\pi] f(x) = f\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = -3$

б) $f(x) = 1{,}5\cdot x^2 + \frac{81}{x}$ $\quad x \in [1;4]$

$$f'(x) = 3\cdot x - \frac{81}{x^2} = \frac{3\cdot(x^3 - 27)}{x^2} = \frac{3\cdot(x-3)\cdot(x^2+3\cdot x+9)}{x^2}$$



$$f(3) = 40.5;\quad f(1) = 82.5;\quad f(4) = 44\frac{1}{4}$$

Ответ: $\max[1;4] f(x) = f(1) = 82.5$; $\min[1;4] f(x) = f(3) = 40.5$

в) $f(x) = 2\cdot\sin(x) + \sin(2\cdot x)$ $\quad x \in \left[0;\frac{3\cdot\pi}{2}\right]$

$$f'(x) = 2\cdot\cos(x) + 2\cdot\cos(2\cdot x) = 2\cdot\cos(x) + 4\cdot\cos^2(x) - 2$$

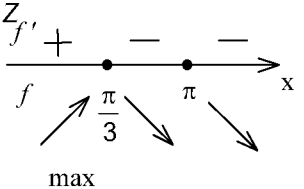
$$2\cdot\cos(x) + 4\cdot\cos^2(x) - 2 = 0;\ 2\cdot\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$$

$\cos(x) = -1$ $\quad x = \pi + 2\cdot k\cdot\pi$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\cdot k\cdot\pi,\ k \in Z$

$$f(\pi) = 0;\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$$f(0) = 0;\ f\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = -2$$

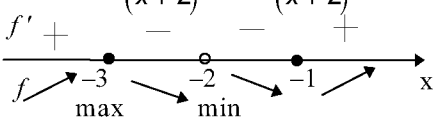


Ответ: $\max\left[0;\frac{3\cdot\pi}{2}\right] f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$

$\min\left[0;\frac{3\cdot\pi}{2}\right] f(x) = f\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = -2$

г) $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$ $\quad x \in [-5;-2.5]$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4\cdot x + 3}{(x+2)^2} = \frac{(x+3)\cdot(x+1)}{(x+2)^2}$$



$f(-3) = -4$; $f(-5) = -5\frac{1}{3}$; $f(-2.5) = -4.5$

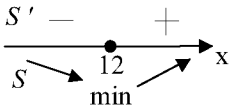
Ответ: $\max[-5;-2,5]\ f(x) = f(-3) = -4$;

$\min[-5;-2.5] f(x) = f(-5) = -5\frac{1}{3}$

311. x – I число, (24 – x) – II число

$S = x^2 + (24 - x)^2$ – сумма квадратов чисел О.Д.З.: $0 \le x \le 24$

$S' = 2\cdot x - 2\cdot(24 - x) = 4\cdot x - 48$; $4\cdot x - 48 = 0$; $x = 12$

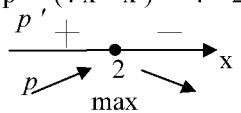


Ответ: 24 = 12 + 12

312. x – I число, (4 – x) – II число

$p = x\cdot(4 - x)$ – произведение этих чисел О.Д.З.: $0 \le x \le 4$

$p' = (4\cdot x - x^2)' = 4 - 2\cdot x$; $4 - 2\cdot x = 0$; $x = 2$

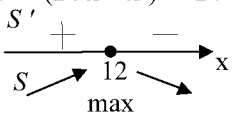


Ответ: 4 = 2 + 2

313. Пусть x м. – ширина. (24 – x) м. – длина

$S = x\cdot(24 - x)$ О.Д.З.: $0 < x < 24$

$S' = (24\cdot x - x^2)' = 24 - 2\cdot x$; $24 - 2\cdot x = 0$; $x = 12$



Ответ: 12 м и 12 м

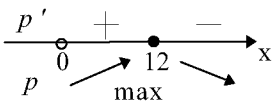
314. Пусть x – I слагаемое.

$2\cdot x$ – II слагаемое. $54 - 3\cdot x$ – III слагаемое.

$p = x\cdot 2\cdot x\cdot(54 - 3\cdot x)$ – произведение всех слагаемых.

$p = 108\cdot x^2 - 6\cdot x^3$ О.Д.З.: $0 < x < 54$

$p' = 216\cdot x - 18\cdot x^2 = 18\cdot x\cdot(12 - x)$



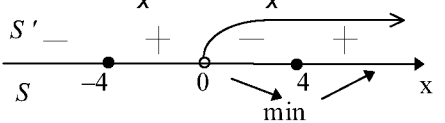
Ответ: 54 = 12 + 24 + 18

315. Пусть x – I сомножитель, $\frac{16}{x}$ – II сомножитель

$S = x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2$ – сумма квадратов этих сомножителей

О.Д.З.: $0 < x < 16$

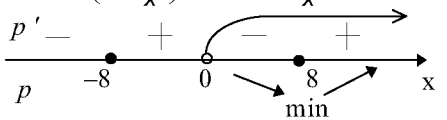
$$S' = 2\cdot x - \frac{512}{x^3} = \frac{2\cdot\left(x^4 - 216\right)}{x^3} = \frac{2\cdot(x-4)\cdot(x+4)\cdot\left(x^2+16\right)}{x^3}$$



Ответ: 16 = 4·4

316. Пусть x см – длина, $\frac{64}{x}$ см – ширина $P = 2\cdot\left(x+\frac{64}{x}\right)$ см – периметр прямоугольника О.Д.З.: 0 < x < 64

$$P' = 2\cdot\left(1-\frac{64}{x^2}\right) = \frac{2\cdot(x-8)\cdot(x+8)}{x^2}$$



Ответ: 8 см и 8 см.

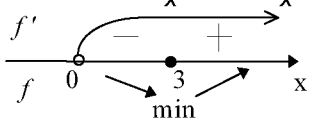
317. Пусть x дм – сторона основания бака.

V бака = $x^2 \cdot h$ О.Д.З.: x > 0

V бака = 13.5 дм^3 13.5 л = 13.5 дм^3 $h = \frac{13,5}{x^2}$

S пов.бака = S осн. + S бок. = $x^2 + 4\cdot x\cdot\frac{13.5}{x^2} = x^2 + \frac{54}{x}$

$$S'(x) = 2\cdot x - \frac{54}{x^2} = \frac{2\cdot(x^3-27)}{x^2} = \frac{2\cdot(x-3)\cdot(x^2+3\cdot x+9)}{x^2}$$

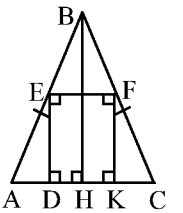


min $[0;\infty)$ S(x) = S(3) = 27

Ответ: S = 27 дм^2 .

318. AB = BC = 50 см AC = 60 см

DEFK – прямоугольник ED, DK = ?



$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 40$ см

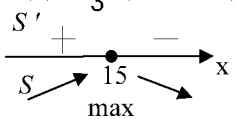
Пусть DH = x AD = 30 – x

$\Delta ADE \sim \Delta ABH$ (по I признаку подобия)

$$\frac{ED}{BH} = \frac{AD}{AH} \Rightarrow ED = \frac{AD\cdot BH}{AH};\ ED = \frac{4}{3}\cdot(30-x)$$

$$S_{DEFK} = DK\cdot ED;\quad S_{DEFK} = 2\cdot x\cdot\frac{4}{3}\cdot(30-x) = \frac{8}{3}\cdot(30\cdot x - x^2)$$

$$S'(x) = \frac{8}{3}\cdot(30-2\cdot x);\ \frac{8}{3}\cdot(30-2\cdot x) = 0;\ x = 15$$

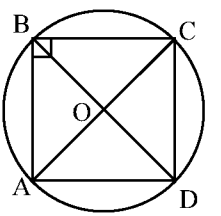


DK = 2·x = 30 см, ED = $\frac{4}{3}\cdot(30-15) = 20$ см

Ответ: 30 см; 20 см.

319. ABCD – прямоугольник

r = OC = 20 см Пусть AB = x см



$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$

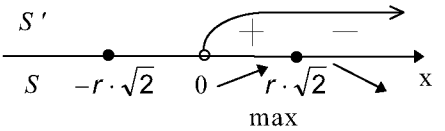
$BC = \sqrt{4\cdot r^2 - x^2}$

$S_{ABCD} = x\cdot\sqrt{4\cdot r^2 - x^2}$

О.Д.З.: 0 < x < 2·r

$$S'(x) = \sqrt{4\cdot r^2 - x^2} - \frac{2\cdot x^2}{2\cdot\sqrt{4\cdot r^2 - x^2}} = \frac{4\cdot r^2 - 2\cdot x^2}{\sqrt{4\cdot r^2 - x^2}}$$

$$\frac{4\cdot r^2-2\cdot x^2}{\sqrt{4\cdot r^2-x^2}}=0$$

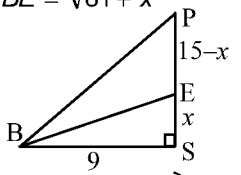


$x=\pm r\cdot\sqrt{2}$

$AB = x = 20\cdot\sqrt{2}$ см , $BC = \sqrt{4\cdot 400-800} = 20\cdot\sqrt{2}$ см

Ответ: $20\cdot\sqrt{2}$ см и $20\cdot\sqrt{2}$ см – стороны прямоугольного сечения.

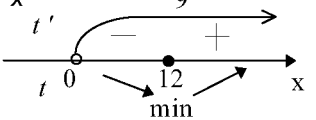
320. Пусть SE = x км О.Д.З.: $0\le x\le 15$ $BE=\sqrt{81+x^2}$



$PE = 15-x$; $t(x)=\frac{\sqrt{81+x^2}}{8}+\frac{15-x}{10}$

$$t'(x)=\frac{x}{8\cdot\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{10}=\frac{5\cdot x-4\cdot\sqrt{81+x^2}}{40\cdot\sqrt{81+x^2}}$$

$$\frac{5\cdot x-4\cdot\sqrt{81+x^2}}{40\cdot\sqrt{81+x^2}}=0$$

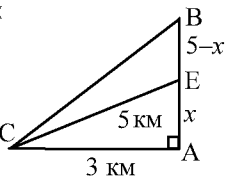


$4\cdot\sqrt{81+x^2}=5\cdot x$; $16\cdot\left(81+x^2\right)=25\cdot x^2$; $x^2=16\cdot 9$; x = 12

Ответ: В точку, удаленную на 3 км от населенного пункта и на 12 км от точки шоссе, ближайшей к буровой вышке.

321. V лодки = 4 км/ч V пассажира = 5 км/ч

Пусть AE = x км О.Д.З.: $0\le x\le 5$

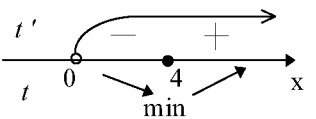


$CE=\sqrt{9+x^2}$ $BE=5-x$

$t(x)=\frac{\sqrt{9+x^2}}{4}+\frac{5-x}{5}$

$$t'(x)=\frac{x}{4\cdot\sqrt{9+x^2}}-\frac{1}{5}=\frac{5\cdot x-4\cdot\sqrt{9+x^2}}{20\cdot\sqrt{9+x^2}}$$

$$\frac{5\cdot x-4\cdot\sqrt{9+x^2}}{20\cdot\sqrt{9+x^2}}=0$$



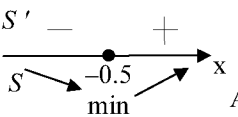
$4\cdot\sqrt{9+x^2}=5\cdot x$; $16\cdot\left(9+x^2\right)=25\cdot x^2$; $9\cdot x^2=16\cdot 9$; x = 4

Ответ: К точке отрезка AB, удаленной от B на 1 км.

322. Пусть x – данное число О.Д.З.: $x\in R$

S = x + x² S' = 1 + 2·x

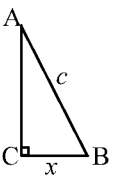
1 + 2·x = 0; x = –0,5



Ответ: –0.5 данное число

323. AB = c – гипотенуза

Пусть BC = x О.Д.З.: x > 0

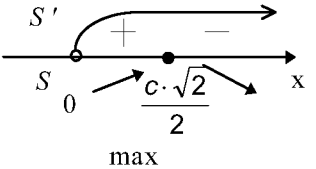


$AC=\sqrt{c^2-x^2}$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{x\cdot\sqrt{c^2-x^2}}{2}$$

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{c^2-x^2}-\frac{2\cdot x^2}{2\cdot\sqrt{c^2-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2-x^2-x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}=\frac{c^2-2\cdot x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}$$

$$\frac{c^2-2\cdot x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}=0;\ x^2=\frac{c^2}{2};\ x=\frac{c\cdot\sqrt{2}}{2}$$

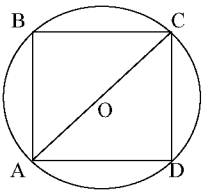


$$BC=\frac{c\cdot\sqrt{2}}{2}$$

$$AC=\sqrt{c^2-\frac{c^2}{2}}=\sqrt{\frac{c^2}{2}}=\frac{c\cdot\sqrt{2}}{2}$$ Следовательно, BC = AC.

Значит, ΔABC – прямоугольный равнобедренный треугольник.

324. ABCD – прямоугольник AC = 2·r



Пусть AB = x О.Д.З.: x > 0

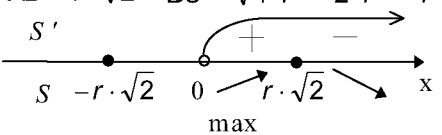
$$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}\qquad BC=\sqrt{4\cdot r^2-x^2}$$

$$S_{ABCD}=x\cdot\sqrt{4\cdot r^2-x^2}$$

$$S(x)=\sqrt{4\cdot r^2-x^2}-\frac{2\cdot x^2}{2\cdot\sqrt{4\cdot r^2-x^2}}=$$

$$\frac{4\cdot r^2-2\cdot x^2}{\sqrt{4\cdot r^2-x^2}}=\frac{2\cdot\left(2\cdot r^2-x^2\right)}{\sqrt{4\cdot r^2-x^2}}=\frac{2\cdot\left(r\cdot\sqrt{2}-x\right)\cdot\left(r\cdot\sqrt{2}+x\right)}{\sqrt{4\cdot r^2-x^2}}$$

$$AB=r\cdot\sqrt{2}\ ,\ BC=\sqrt{4\cdot r^2-2\cdot r^2}=r\cdot\sqrt{2}$$



Значит, AB = BC.

Следовательно, ABCD – квадрат. **Ответ:** Квадрат – прямоугольник наибольшей площади, вписанный в окружность.

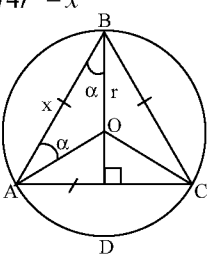
325. Пусть $|AB|=|BC|=x$, $\angle BAO=\angle ABO=\alpha$. Тогда $x=2r\cos\alpha$,

$\cos\alpha=\frac{x}{2r}$; $|AC|=2x\sin\alpha=2x\sqrt{1-\frac{x^2}{4r^2}}$, $|BD|=x\cos\alpha=\frac{x^2}{2r}$;

$S_{ABC}(x)=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{1}{2}\frac{x^3}{r}\sqrt{1-\frac{x^2}{4r^2}}=\frac{x^3}{4r^2}\sqrt{4r^2-x^2}$, где $x\in(0;\ 2r)$.

Найдем $\max\limits_{(0;2r)}S(x)$: $S'(x)=\frac{3x^2}{4r^2}\sqrt{4r^2-x^2}-\frac{x^4}{4r^4\sqrt{4r^2-x^2}}=$

$=\frac{x^2(3r^2-x^2)}{r^2\sqrt{4r^2-x^2}}=\frac{x^2(\sqrt{3}r-x)(\sqrt{3}r+x)}{r^2\sqrt{4r^2-x^2}}$;



$S'(x)=0$, если $x=\sqrt{3}r$ на $(0;\ 2r)$;

$S'(x)>0$, если $x\in(0;\ \sqrt{3}r)$;

$S'(x)>0$, если $x\in(\sqrt{3}r;\ 2r)$;

$\max\limits_{(0;\ 2r)}S(x)=S(\sqrt{3}r)=\frac{2\sqrt{3}r^2}{4}$.

Таким образом, $|AB|=|BC|=\sqrt{3}r$, т. е. треугольник ABC является равносторонним, ч.т.д.

Повторение к главе 2

1. 3) **а)** $f(x) = x^2 - x$ $\quad \Delta f(x) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x) - x_0^2 + x_0 =$

$= 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - \Delta x = \Delta x(2x_0 + \Delta x - 1)$ $\quad \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2 \cdot x_0 - 1 + \Delta x$

б) $f(x) = x^3 + 2$ $\quad \Delta f(x) = (x_0 + \Delta x)^3 + 2 - x_0^3 - 2 =$

$= 3 \cdot x_0^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot x_0 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 = \Delta x \cdot \left(3 \cdot x_0^2 + 3 \cdot x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2\right)$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3 \cdot x_0^2 + 3 \cdot x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2$

в) $f(x) = 3 \cdot x - 1$ $\quad \Delta f(x) = 3(x_0 + \Delta x) - 1 - 3x_0 + 1 = 3\Delta x$ $\quad \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3$

г) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ $\quad \Delta f(x) = \dfrac{2}{x_0 + \Delta x} - \dfrac{2}{x_0} = -\dfrac{2\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$ $\quad \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -\dfrac{2}{x_0(x_0 + \Delta x)}$

Ответ: а) $2x_0 - 1 + \Delta x$; **б)** $3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2$; **в)** 3; **г)** $-\dfrac{2}{x_0(x_0 + \Delta x)}$

2. 2) **а)** $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = -2$

$\Delta f(x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1 = \Delta x \cdot (2 \cdot x_0 + \Delta x)$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2 \cdot x_0 + \Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 2 \cdot x_0$ $\quad f'(x_0) = 2 \cdot x_0$ $\quad f'(-2) = -4$

б) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $x_0 = 3$ $\quad \Delta f(x) = \dfrac{2}{x_0 + \Delta x} - \dfrac{2}{x_0} = -\dfrac{2 \cdot \Delta x}{x_0 \cdot (x_0 + \Delta x)}$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -\dfrac{2}{x_0 \cdot (x_0 + \Delta x)} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} -\dfrac{2}{x_0^2}$; $\quad f'(x_0) = -\dfrac{2}{x_0^2}$; $\quad f'(3) = -\dfrac{2}{9}$

в) $f(x) = 2 \cdot x - 1$, $x_0 = -4$ $\quad \Delta f(x) = 2(x_0 + \Delta x) - 1 - 2x_0 + 1 = 2\Delta x$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2 \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 2$ $\quad f'(x_0) = 2$ $\quad f'(-4) = 2$

г) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$ $\quad \Delta f(x) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = \Delta x\left(3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2\right)$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 3x_0^2$ $\quad f'(x_0) = 3x_0^2$ $\quad f'(2) = 12$

Ответ: а) -4; **б)** $-\dfrac{2}{9}$; **в)** 2; **г)** 12.

3. 3) **а)** $f'(x) = \left((x + 2) \cdot \sin(x)\right)' = \sin(x) + (x + 2) \cdot \cos(x)$;

б) $f'(x) = \left(\dfrac{4}{(9 + 7 \cdot x)^5}\right)' = -\dfrac{4 \cdot 5 \cdot 7}{(9 + 7 \cdot x)^6} = -\dfrac{140}{(9 + 7 \cdot x)^6}$;

в) $f'(x) = \left(x^3 - \dfrac{2}{x} + \cos(3 \cdot x)\right)' = 3 \cdot x^2 + \dfrac{2}{x^2} - 3 \cdot \sin(3 \cdot x)$;

г) $f'(x) = \left(\dfrac{x^2}{x + 3}\right)' = \dfrac{2 \cdot x \cdot (x + 3) - x^2}{(x + 3)^2} = \dfrac{x^2 + 6 \cdot x}{(x + 3)^2}$.

4. 2) **а)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 2 \cdot x^2 - 5}{4 - x^2}$ $\quad 4 - x^2 \neq 0$ $\quad x \neq \pm 2$

$f(x)$ непрерывна на $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$

б) $f(x) = 1 - 2 \cdot \mathrm{tg}(x) \quad \cos(x) \neq 0 \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in Z$

$f(x)$ непрерывна на $\left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$, $k \in Z$

в) $f(x) = \frac{x-4}{x^2 - 3 \cdot x - 10} \quad x^2 - 3 \cdot x - 10 \neq 0 \quad x \neq 5,\ x \neq -2$

$f(x)$ непрерывна на $(-\infty; -2) \cup (-2; 5) \cup (5; \infty)$

г) $f(x) = x^4 - 3 \cdot x^2 + 7 \quad D(f) = R$

$f(x)$ непрерывна на множестве R .

5. 3) **а)** $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = \frac{2 \cdot \pi}{3} \qquad f'(x) = -\sin(x)$

$f\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $f'\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$ – уравнение касательной в точке $x_0 = \frac{2 \cdot \pi}{3}$

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2 \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = -\frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot (x - 2) = 1 - \frac{1}{4} \cdot x$ – уравнение касательной в точке $x_0 = 2$

в) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = \pi \qquad f'(x) = \cos(x)$, $f(\pi) = 0$, $f'(\pi) = 1$

$y = 0 + 1 \cdot (x - \pi) = x - \pi$ – уравнение касательной в точке $x_0 = \pi$

г) $f(x) = x^2$, $x_0 = -\frac{1}{2} \quad f'(x) = 2 \cdot x$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$y = \frac{1}{4} - 1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = -x - \frac{1}{4}$ – уравнение касательной в точке $x_0 = -\frac{1}{2}$

6. 3) **а)** $\frac{1}{1.001^{10}} = 1.001^{-10} = (1 + 0.001)^{-10} \approx 1 + 0.001 \cdot (-10) \approx 0.99$

б) $\sin(59°) = \sin(60° - 1°) \qquad x_0 = 60°$, $\Delta x = -1° = -\frac{\pi}{180}$

$f(x_0) = \frac{1}{2}$, $f'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(59°) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0.4849$

в) $\sqrt{9.009} = \sqrt{9 \cdot (1 + 0.001)} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0.001\right) \approx 3.0015$

г) $0.999^{15} = (1 - 0.001)^{15} \approx 1 + 15 \cdot (-0.001) \approx 0.985$

Ответ: а) 0.99; **б)** 0.4849; **в)** 3.0015; **г)** 0.985.

7. 3) **а)** $x(t) = t^3 - 2 \cdot t^2 + 5$, $t_0 = 4$, $v(t) = x'(t) = 3 \cdot t^2 - 4 \cdot t$,

$a(t) = v'(t) = 6 \cdot t - 4$, $v(4) = 48 - 16 = 32$, $a(4) = 24 - 4 = 20$

б) $x(t) = 3 \cdot \cos(2 \cdot t)$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$, $v(t) = x'(t) = -6 \cdot \sin(2 \cdot t)$,

$a(t) = v'(t) = -12 \cdot \cos(2 \cdot t)$, $v\left(\frac{\pi}{3}\right) = -6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3 \cdot \sqrt{3}$,

$a\left(\frac{\pi}{3}\right) = -12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 6$

в) $x(t) = 5 \cdot t - t^2$, $t_0 = 2$; $v(t) = x'(t) = 5 - 2 \cdot t$; $a(t) = v'(t) = -2$;
$v(2) = 5 - 4 = 1$; $a(2) = -2$

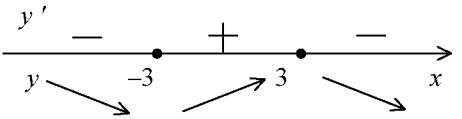
г) $x(t) = 2 \cdot t^2 + t - 4$, $t_0 = 4$; $v(t) = x'(t) = 4 \cdot t + 1$;
$a(t) = v'(t) = 4$; $v(4) = 16 + 1 = 17$; $a(4) = 4$

8. 3) **а)** $y = \frac{x}{x^2 + 9}$ $\quad D(f) = R$

$$y' = \frac{x^2 + 9 - 2 \cdot x^2}{\left(x^2 + 9\right)^2} = \frac{9 - x^2}{\left(x^2 + 9\right)^2} = \frac{(3 - x) \cdot (3 + x)}{\left(x^2 + 9\right)^2}$$

$$\frac{(3 - x) \cdot (3 + x)}{\left(x^2 + 9\right)^2} = 0$$

$x_1 = 3$, $x_2 = -3$

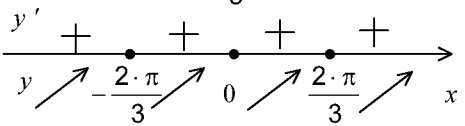


$f(x)$ убывает на $(-\infty; -3]$ и $[3; \infty)$, $f(x)$ возрастает на $[-3; 3]$.

б) $y = 3 \cdot x - \sin(3 \cdot x)$ $D(f) = R$

$y' = 3 - 3 \cdot \cos(3 \cdot x)$; $3 - 3 \cdot \cos(3 \cdot x) = 0$; $\cos(3 \cdot x) = 1$;

$3 \cdot x = 2 \cdot k \cdot \pi$; $x = \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{3}$, $k \in Z$



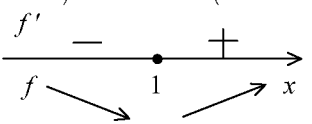
$f(x)$ возрастает на всем множестве R.

в) $y = x^4 - 4 \cdot x$ $\quad D(f) = R$

$y' = 4 \cdot x^3 - 4 = 4 \cdot (x - 1) \cdot \left(x^2 + x + 1\right)$; $4 \cdot (x - 1) \cdot \left(x^2 + x + 1\right) = 0$;

x = 1

$f(x)$ убывает на $(-\infty; 1]$,
$f(x)$ возрастает на $[1; \infty)$.

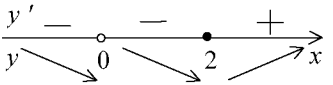


г) $y = x^2 + \frac{16}{x}$ $\quad D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

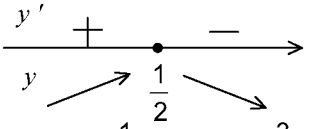
$$y' = 2 \cdot x - \frac{16}{x^2} = \frac{2 \cdot \left(x^3 - 8\right)}{x^2} = \frac{2 \cdot (x - 2) \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x + 4\right)}{x^2}$$

$$\frac{2 \cdot (x - 2) \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x + 4\right)}{x^2} = 0; \quad x = 2$$

$f(x)$ убывает на $(-\infty; 0) \cup (0; 2]$,
$f(x)$ возрастает на $[2; \infty)$.



9. 3) **а)** $y=\frac{x}{2}-x^4 \qquad D(f)=R$



$y'=\frac{1}{2}-4\cdot x^3;\ \frac{1}{2}-4\cdot x^3=0;$

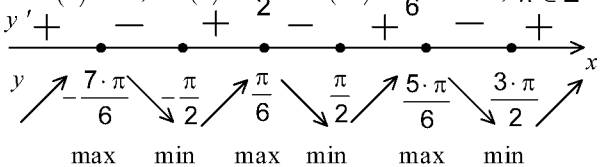
$x^3=\frac{1}{8};\ x=\frac{1}{2}$ **Ответ:** $x_{max}=\frac{1}{2};\ f(x_{max})=\frac{3}{16}$

б) $y=2\cdot\sin(x)+\cos(2\cdot x) \qquad D(f)=R$

$y'=2\cdot\cos(x)-2\cdot\sin(2\cdot x)=2\cdot\cos(x)\cdot(1-2\cdot\sin(x))$

$2\cdot\cos(x)\cdot(1-2\cdot\sin(x))=0;\ \cos(x)=0\ \ x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ k\in Z$

$1-2\cdot\sin(x)=0;\ \sin(x)=\frac{1}{2}\ \ x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi,\ k\in Z$



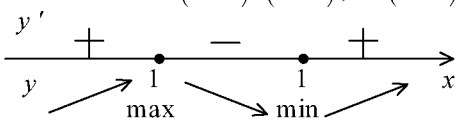
Ответ: $x_{min}=\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi;\ x_{max}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi;$

$x_{min}=-\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi,\ k\in Z \qquad f\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi\right)=1$

$f\left(-\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi\right)=-3 \qquad f\left((-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi\right)=1.5$

в) $y=x^3-3\cdot x \qquad D(f)=R$

$y'=3\cdot x^2-3=3\cdot(x-1)\cdot(x+1);\ 3\cdot(x-1)\cdot(x+1);\ x_1=1,\ x_2=-1$



Ответ: $x_{max}=-1;\ x_{min}=1;\ f(-1)=2;\ f(1)=-2$

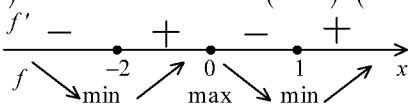
г) $y=x-\mathrm{tg}(x)\ \ D(f): x\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ k\in Z$

$y'==1-\frac{1}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)-1}{\cos^2(x)}=-\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=-\mathrm{tg}^2(x)<0$

при $x\in D(f)$ **Ответ:** Следовательно, $f(x)$ убывает на всей $D(f)$, а потому точек max и min не имеет.

10. 2) **а)** $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2,\ D(f)=R$

$f'(x)=x^3+x^2-2\cdot x=x\cdot(x+2)\cdot(x-1)$



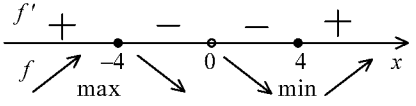
$x_{min}=-2;\ x_{min}=1;\ x_{max}=0$

$f(-2) = -2\frac{2}{3}$; $f(1) = -\frac{5}{12}$; $f(0) = 0$

$f(x)$ убывает на $(-\infty;-2);[0;1]$, $f(x)$ возрастает на $(-\infty;-2];[1;\infty)$.

б) $f(x) = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$ $\quad D(f) = (-\infty;0)\cup(0;\infty)$

$$f'(x) = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2-16}{2\cdot x^2} = \frac{(x-4)\cdot(x+4)}{2\cdot x^2}$$



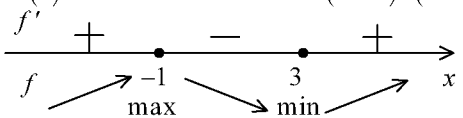
$x_{min} = 4$; $x_{max} = -4$

$f(4) = 4$; $f(-4) = -4$

$f(x)$ убывает на $[4;0)\cup(0;4]$, $f(x)$ возрастает на $(-\infty;-4]$; $[4;\infty)$.

в) $f(x) = x^3 - 3\cdot x^2 - 9\cdot x$, $D(f) = R$

$f'(x) = 3\cdot x^2 - 6\cdot x - 9 = 3\cdot(x-3)\cdot(x+1)$



$x_{min} = 3$; $x_{max} = -1$

$f(3) = -27$; $f(-1) = 5$

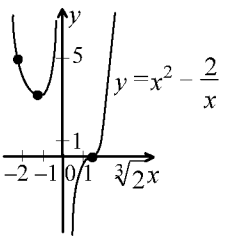
$f(x)$ возрастает на $(-\infty;-1]$ и $[3;\infty)$, $f(x)$ убывает на $[-1;3]$.

г) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ $\quad D(f): x \neq \pm 2$

$$f'(x) = \frac{4-x^2+2\cdot x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2+4}{(4-x^2)^2} > 0 \text{ при } x \in D(f)$$

Ответ: Следовательно, $f(x)$ возрастает на всей $D(f)$, а потому точек max и min не имеет.

3) **а)** $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$



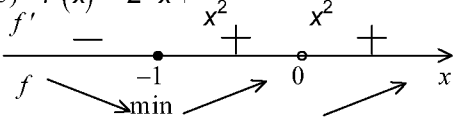
1) $D(f) = (-\infty;0)\cup(0;\infty)$; $E(f) = R$

2) не чет., не нечет.

3) $x \neq 0$; y = 0, $x = \sqrt[3]{2}$

4) y > 0 на $(-\infty;0);(\sqrt[3]{2};\infty)$; y < 0 на $(0;\sqrt[3]{2})$

5) $f'(x) = 2\cdot x + \frac{2}{x^2} = \frac{2\cdot(x^3+1)}{x^2}$



$f(-1) = 3$

6)

x	1	2	3	0.5	−2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	−3
y	−1	3	$8\frac{1}{3}$	$-3\frac{3}{4}$	5	$4\frac{1}{4}$	$8\frac{1}{16}$	$9\frac{1}{3}$

б) $f(x) = x^2 \cdot (x-2)^2$

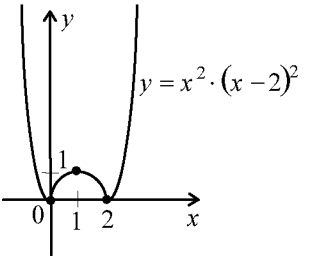
1) $D(f) = R$, $E(f) = [0; +\infty)$

2) не чет., не нечет.

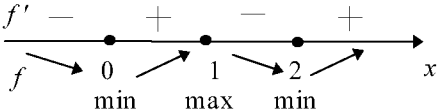
3) x = 0, y = 0; y = 0 , $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

4) $f(x) \geq 0$ на R

5) $f'(x) = 2 \cdot x \cdot (x-2)^2 +$
$+ 2 \cdot x^2 \cdot (x-2) =$
$= 2 \cdot x \cdot (x-2) \cdot (2 \cdot x - 2) =$
$= 4 \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x-1)$



$f(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f(2) = 0$



6)

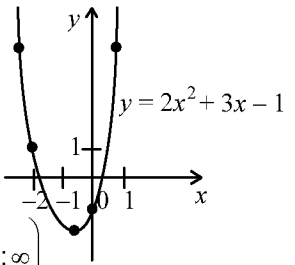
x	–1	3
y	9	9

в) $f(x) = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1$

1) $D(f) = R$, $E(f) = \left[-2\frac{1}{8}; +\infty\right)$

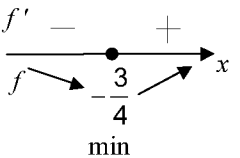
2) не чет., не нечет.

3) x = 0, y = –1, y = 0, $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$



4) $f(x) > 0$ на $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right); \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{4}; \infty\right)$

$f(x) < 0$ на $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{4}; \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)$



5) $f'(x) = 4 \cdot x + 3$ $\quad f\left(-\frac{3}{4}\right) = -2\frac{1}{8}$

6)

x	1	–1	–2
y	4	–2	1

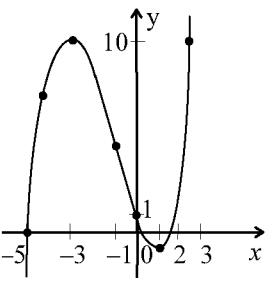
г) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3 \cdot x + 1$

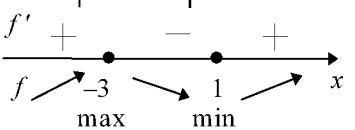
1) $D(f) = R$, $E(f) = R$

2) не чет., не нечет. 3) x = 0 y = 1

4) $f(x) > 0$ на $\left(-4\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$; $(1.5; \infty)$

$f(x) < 0$ на $\left(-\infty; -4\frac{3}{4}\right)$; $(0.5; 1.5)$





5) $f'(x) = x^2 + 2 \cdot x - 3 =$
$= (x+3) \cdot (x-1)$

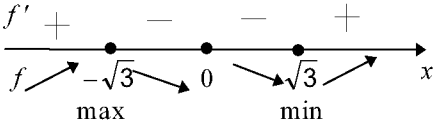
$f(-3) = -9 + 9 + 9 + 1 = 10$; $f(1) = \frac{1}{3} + 1 - 3 + 1 = -\frac{2}{3}$

6)

x	–1	3	–4	–5
y	$4\frac{2}{3}$	10	$7\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

11. 2) **а)** $f(x) = 0.8 \cdot x^5 - 4 \cdot x^3 \qquad x \in [-1;2]$

$f'(x) = 4 \cdot x^4 - 12 \cdot x^2 = 4 \cdot x^2 \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$



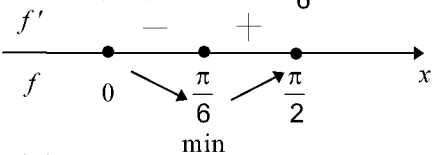
$f(0) = 0$; $f(\sqrt{3}) = -4{,}8 \cdot \sqrt{3}$; $f(-1) = 3{,}2$; $f(2) = -6{,}4$ **Ответ:**

$\max[-1;2] f(x) = f(-1) = 3.2$; $\min[-1;2] f(x) = f(\sqrt{3}) = -4.8 \cdot \sqrt{3}$

б) $f(x) = x - \sin(2 \cdot x) \qquad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x) = 1 - 2 \cdot \cos(2 \cdot x)$; $1 - 2 \cdot \cos(2 \cdot x) = 0$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, k \in Z$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$;

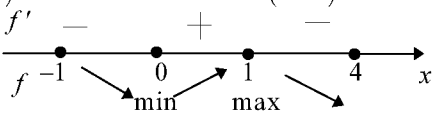


$f(0) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

Ответ: $\max\left[0; \frac{\pi}{2}\right] f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$; $\min\left[0; \frac{\pi}{2}\right] f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

в) $f(x) = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 \qquad x \in [-1;4]$

$f'(x) = 6 \cdot x - 6 \cdot x^2 = 6 \cdot x \cdot (1 - x)$

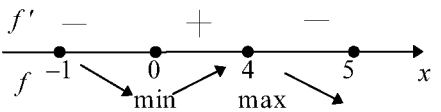


$f(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f(-1) = 5$; $f(4) = -80$

Ответ: $\max[-1;4] f(x) = f(-1) = 5$; $\min[-1;4] f(x) = f(4) = -80$

г) $f(x) = x^2 \cdot (6 - x) \qquad x \in [-1;5]$

$f'(x) = 2 \cdot x \cdot (6 - x) - x^2 = 12 \cdot x - 3 \cdot x^2 = 3 \cdot x \cdot (4 - x)$



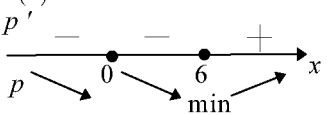
$f(0) = 0$; $f(4) = 32$; $f(-1) = 7$; $f(5) = 25$

Ответ: $\max[-1;5] f(x) = f(4) = 32 \quad \min[-1;5] f(x) = f(0) = 0$

3) **а)** Пусть x – I число. (x – 8) – II число. I число больше II числа.

$p = x^3 \cdot (x - 8) = x^4 - 8 \cdot x^3$ О.Д.З.: $x \in R$

$p'(x) = 4 \cdot x^3 - 24 \cdot x^2 = 4 \cdot x^2 \cdot (x - 6)$



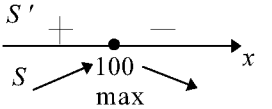
Ответ: 6 и –2 – данные числа.

б) Пусть x м – сторона площадки, параллельная стене.

$\frac{1}{2}\cdot(200-x)$ м – II сторона площадки. О.Д.З.: x > 0

$S=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(200-x)=\frac{1}{2}\cdot(200\cdot x-x^2)$

$S'(x)=\frac{1}{2}\cdot(200-2\cdot x)=100-x$



Ответ: 100 м и 50 м – размеры площадки.

326. а) $F'(x)=\left(x^5\right)'=5\cdot x^4=f(x)$

б) $F'(x)=\left(x^{-3}\right)'=-3\cdot x^{-4}=f(x)$

в) $F'(x)=\left(\frac{1}{7}\cdot x^7\right)'=x^6=f(x)$

г) $F'(x)=\left(-\frac{1}{6}\cdot x^{-6}\right)'=x^{-7}=f(x)$

327. а) $F'(x)=\left(3-\sin(x)\right)'=-\cos(x)\neq f(x)$

Следовательно, $F(x)$ не является первообразной для $f(x)$

б) $F'(x)=\left(5-x^4\right)'=-4\cdot x^3=f(x)$

Следовательно, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$

в) $F'(x)=\left(\cos(x)-4\right)'=-\sin(x)=f(x)$

Следовательно, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$

г) $F'(x)=\left(x^{-2}+2\right)'=-2\cdot x^{-3}=-\frac{2}{x^3}\neq f(x)$

Следовательно, $F(x)$ не является первообразной для $f(x)$

Ответ: а) нет; **б)** да; **в)** да; **г)** нет.

328. а) $F(x)=3.5\cdot x$ **б)** $F(x)=\sin(x)+3$

в) $F(x)=\frac{2\cdot x^2}{2}=x^2$ **г)** $F(x)=-\cos(x)$

329. а) $F(x)=\cos(x)+3$ **б)** $F(x)=-\frac{x^2}{2}+5$

в) $F(x)=-4\cdot x$ **г)** $F(x)=-\sin(x)+\frac{\pi}{2}$

330. а) $F'(x)=\left(\sin^2(x)\right)'=2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)=\sin(2\cdot x)=f(x),\ x\in R$

б) $F'(x)=\left(\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot x)\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(-2\cdot\sin(2\cdot x)\right)=$

$=-\sin(2\cdot x)=f(x),\ x\in R$

в) $F'(x)=\left(\sin(3\cdot x)\right)'=3\cdot\cos(3\cdot x)=f(x),\ x\in R$

г) $F'(x)=\left(3+\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=\frac{1}{2\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=f(x),\ x\in R$

331. а) $F'(x)=\left(2\cdot x+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=2-\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)=f(x),\ x\in R$

Следовательно, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$

б) $F'(x)=\left(\sqrt{4-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=f(x),\ x\in(-2;2)$

Следовательно, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$

в) $F'(x)=\left(\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{2}{x^3}\neq f(x),\ x\in(0;\infty)$

Следовательно, $F(x)$ не является первообразной для $f(x)$

г) $F'(x)=\left(4\cdot x\cdot\sqrt{x}\right)'=4\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}=6\cdot\sqrt{x}=f(x),\ x\in(0;\infty)$

Следовательно, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$

Ответ: а) да; **б)** да; **в)** нет; **г)** да.

332. а) $F(x)=\frac{x^2}{2}+2\cdot x+5$

б) $f(x)=\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-$

$-2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)=1-\sin(x)$ $\qquad F(x)=x+\cos(x)$

в) $f(x)=\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ $\qquad F(x)=x$

г) $F(x)=x^3+x$

333. а) $F_1(x)=x^2$ $\qquad F_2(x)=x^2+3$

б) $F_1(x)=x+\cos(x)+6$ $\qquad F_2(x)=x+\cos(x)-1$

в) $F_1(x)=\frac{x^3}{3}$ $\qquad F_2(x)=\frac{x^3}{3}-5$

г) $F_1(x)=\sin(x)+2\cdot x$ $\qquad F_2(x)=\sin(x)+2\cdot x+4$

334. Ответ: а) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ **б)** $h(x)=x+\sin(x)$ **в)** $g(x)=x+2$

г) $f(x)=3-2\cdot\sin(x)$

335. а) $F(x)=2\cdot x-\frac{x^5}{5}+c$ **б)** $F(x)=\frac{x^2}{2}+\sin(x)+c$

в) $F(x)=2\cdot x^2+c$ **г)** $F(x)=-3\cdot x+c$

336. а) $F(x)=\frac{x^7}{7}+c$ **б)** $F(x)=-\frac{1}{2\cdot x^2}-2\cdot x+c$

в) $F(x)=x+\frac{1}{3\cdot x^3}+c$ **г)** $F(x)=\frac{x^6}{6}+c$

337. а) $F(x)=-\frac{1}{x}+c$; $-\frac{1}{\frac{1}{2}}+c=-12$; $c=-10$; $F(x)=-\frac{1}{x}-10$

Ответ: $F(x)=-\frac{1}{x}-10$

б) $F(x) = \mathrm{tg}(x) + c$; $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + c = 0$; $c = -1$; $F(x) = \mathrm{tg}(x) - 1$

Ответ: $F(x) = \mathrm{tg}(x) - 1$

в) $F(x) = \frac{x^4}{4} + c$; $\frac{(-1)^4}{4} + c = 2$; $c = 1\frac{3}{4}$; $F(x) = \frac{x^4}{4} + 1\frac{3}{4}$

Ответ: $F(x) = \frac{x^4}{4} + 1\frac{3}{4}$

г) $F(x) = -\cos(x) + c$; $-\cos(-\pi) + c = -1$; $c = -2$;

$F(x) = -\cos(x) - 2$ **Ответ:** $F(x) = -\cos(x) - 2$

338. а) $F'(x) = (\sin(x) - x \cdot \cos(x))' = \cos(x) - \cos(x) + x \cdot \sin(x) =$
$= x \cdot \sin(x) = f(x)$ **Ответ:** Следовательно, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. $F(x) = \sin(x) - x \cdot \cos(x) + c$.

б) $F'(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$

Ответ: Следовательно, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$

$F(x) = \sqrt{x^2+1} + c$.

в) $F'(x) = (\cos(x) + x \cdot \sin(x))' =$
$= -\sin(x) + \sin(x) + x \cdot \cos(x) = x \cdot \cos(x) = f(x)$

Ответ: Следовательно, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$

$F(x) = \cos(x) + x \cdot \sin(x) + c$.

г) $F'(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2} = f(x)$

Ответ: Следовательно, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$

$F(x) = x - \frac{1}{x} + c$.

339. а) $f(x) = 2 \cdot \cos(x)$, $M\left(-\frac{\pi}{2};1\right) \in F(x)$

$F(x) = 2 \cdot \sin(x) + c$; $2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c = 1$; $c = 3$

Ответ: $F(x) = 2 \cdot \sin(x) + 3$

б) $f(x) = 1 - x^2$, $M(-3;9) \in F(x)$ $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + c$;

$-3 - \frac{(-3)^3}{3} + c = 9$; $c = 3$ **Ответ:** $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + 3$

в) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2 \cdot \pi}{3};-1\right) \in F(x)$

$F(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + c$; $-\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + c = -1$; $1 + c = -1$;

$c = -2$ **Ответ:** $F(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$

г) $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{2};3\right)\in F(x)$

$F(x)=-\frac{1}{3\cdot x^3}+c$; $-\frac{1}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}+c=3$; $-2\frac{2}{3}+c=3$; $c=5\frac{2}{3}$

Ответ: $F(x)=-\frac{1}{3\cdot x^3}+5\frac{2}{3}$

340. а) $f(x)=2-\sin(x)$ a $=4$; $F(x)=2\cdot x+\cos(x)+c$;

$F_1(x)-F_2(x)=c_1-c_2=4$; $c_1=c_2+4$; $c_2=0$, $c_1=4$

Ответ: $F_2(x)=2x+\cos(x)$; $F_1(x)=2x+\cos(x)+4$

б) $f(x)=1+\mathrm{tg}^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$; a $=1$

$F(x)=\mathrm{tg}(x)+c$; $F_1(x)-F_2(x)=c_1-c_2=1$; $c_2=0$, $c_1=1$

Ответ: $F_1(x)=\mathrm{tg}(x)+1$ $F_2(x)=\mathrm{tg}(x)$

в) $f(x)=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=-\cos(x)$; a $=0.5$

$F(x)=-\sin(x)+c$; $F_1(x)-F_2(x)=c_1-c_2=0.5$; $c_2=0$, $c_1=0.5$

Ответ: $F_1(x)=-\sin(x)+0.5$ $F_2(x)=-\sin(x)$

г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$, $a=2$

$F(x)=2\cdot\sqrt{x}+c$; $F_1(x)-F_2(x)=c_1-c_2=2$; $c_2=0$, $c_1=2$

Ответ: $F_1(x)=2\cdot\sqrt{x}+2$; $F_2(x)=2\cdot\sqrt{x}$

341. а) $a(t)=-2\cdot t$, $t_0=1$, $x_0=4$, $v_0=2$

$v'(t)=a(t)$; $v(t)=-t^2+c_1$; $c_1-1=2$; $c_1=3$

$v(t)=-t^2+3$; $x'(t)=v(t)$; $x(t)=-\frac{t^3}{3}+3\cdot t+c_2$; $4=-\frac{1}{3}+3+c_2$;

$c_2=1\frac{1}{3}$ **Ответ:** $x(t)=-\frac{t^3}{3}+3\cdot t+1\frac{1}{3}$

б) $a(t)=\sin(t)$, $t_0=\frac{\pi}{2}$, $x_0=2$, $v_0=1$

$v(t)=-\cos(t)+c_1$; $1=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+c_1$; $c_1=1$

$v(t)=-\cos(t)+1$; $x(t)=-\sin(t)+t+c_2$; $2=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}+c_2$;

$c_2=3-\frac{\pi}{2}$ **Ответ:** $x(t)=-\sin(t)+t+3-\frac{\pi}{2}$

в) $a(t)=6\cdot t$, $t_0=0$, $x_0=3$, $v_0=1$

$v(t)=3\cdot t^2+c_1$; $1=3\cdot 0+c_1$; $c_1=1$

$v(t)=3\cdot t^2+1$; $x(t)=t^3+t+c_2$; $3=0+0+c_2$; $c_2=3$

Ответ: $x(t)=t^3+t+3$

г) $a(t) = \cos(t)$, $t_0 = \pi$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$

$v(t) = \sin(t) + c_1$; $0 = \sin(\pi) + c_1$; $c_1 = 0$

$v(t) = \sin(t)$; $x(t) = -\cos(t) + c_2$; $1 = -\cos(\pi) + c_2$; $c_2 = 0$

Ответ: $x(t) = -\cos(t)$

342. а) $F(x) = 2 \cdot x - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2 \cdot x^2} + c$ **б)** $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^4} + \sin(x) + c$

в) $F(x) = -\frac{1}{x} + \cos(x) + c$ **г)** $F(x) = \frac{5 \cdot x^3}{3} - x + c$

343. а) $F(x) = \frac{(2 \cdot x - 3)^6}{12} + c$ **б)** $F(x) = -1.5 \cdot \cos(2 \cdot x) + c$

в) $F(x) = \frac{(4-5x)^8}{-40} + c$ **г)** $F(x) = -\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + c$

344. а) $F(x) = -\frac{3}{(-15) \cdot 3 \cdot (4 - 15 \cdot x)^3} + c = \frac{1}{15 \cdot (4 - 15 \cdot x)^3} + c$

б) $F(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} + c = \frac{2}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} + c = -2tg\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + c$

в) $F(x) = -\frac{4}{3 \cdot (3 \cdot x - 1)} + c$ **г)** $F(x) = \frac{1}{2 \cdot x^4} + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{tg}(3 \cdot x - 1) + c$

345. а) $f(x) = 4 \cdot x + \frac{1}{x^2}$, $M(-1;4) \in F(x)$

$F(x) = 2 \cdot x^2 - \frac{1}{x} + c$; $4 = 2 \cdot (-1)^2 - \frac{1}{-1} + c$; $c = 1$

Ответ: $F(x) = 2 \cdot x^2 - \frac{1}{x} + 1$

б) $f(x) = x^3 + 2$, $M(2;15) \in F(x)$; $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2 \cdot x + c$;

$15 = \frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2 + c$; $c = 7$; **Ответ:** $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2 \cdot x + 7$

в) $f(x) = 1 - 2 \cdot x$, $M(3;2) \in F(x)$; $F(x) = x - x^2 + c$;

$2 = 3 - 3^2 + c$; $c = 8$; **Ответ:** $F(x) = x - x^2 + 8$

г) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 10 \cdot x^4 + 3$, $M(1;5) \in F(x)$

$F(x) = -\frac{1}{2 \cdot x^2} - 2 \cdot x^5 + 3 \cdot x + c$; $5 = -\frac{1}{2} - 2 + 3 + c$; $c = 4\frac{1}{2}$

Ответ: $F(x) = -\frac{1}{2 \cdot x^2} - 2 \cdot x^5 + 3 \cdot x + 4.5$

346. а) $F(x) = x - \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot x) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + c$

б) $F(x) = -\frac{1}{4} \cdot \mathrm{ctg}(4x) - 2\sqrt{2-x} - x^3 + c = -\frac{\mathrm{ctg}\,4x}{4} - 2\sqrt{2-x} - x^3 + c$

в) $F(x) = \frac{2}{3} \cdot \mathrm{tg}(3 \cdot x + 1) - 3 \cdot \cos(4 - x) + x^2 + c$

г) $F(x)=\frac{1}{4\cdot(3-2\cdot x)^2}+\frac{6}{5}\cdot\sqrt{5\cdot x-2}-2\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+c=$

$=\frac{1}{4(3-2x)^2}+1\frac{1}{5}\sqrt{5x-2}+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+c$

347. а) $f(x)=2\cdot x+1$, $M(0;0)\in F(x)$

$F(x)=x^2+x+c$; $0=0+0+c$; $c=0$ **Ответ:** $F(x)=x^2+x$

б) $f(x)=3\cdot x^2-2\cdot x$, $M(1;4)\in F(x)$

$F(x)=x^3-x^2+c$; $4=1-1+c$; $c=4$ **Ответ:** $F(x)=x^3-x^2+4$

в) $f(x)=x+2$, $M(1;3)\in F(x)$

$F(x)=\frac{x^2}{2}+2\cdot x+c$; $3=\frac{1}{2}+2+c$; $c=0.5$

Ответ: $F(x)=\frac{x^2}{2}+2\cdot x+0.5$

г) $f(x)=-x^2+3\cdot x$, $M(2;-1)\in F(x)$

$F(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{3\cdot x^2}{2}+c$; $-1=-\frac{8}{3}+6+c$; $c=-4\frac{1}{3}$

Ответ: $F(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{3\cdot x^2}{2}-4\frac{1}{3}$

348. $v(t)=t^2+2\cdot t-1$, $x(0)=0$; $x(t)=\frac{t^3}{3}+t^2-t+c$;

$0=0+0-0+c$; $c=0$. **Ответ:** $x(t)=\frac{1}{3}\cdot t^3+t^2-t$

349. $v(t)=2\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)$, $x\left(\frac{\pi}{3}\right)=4$; $x(t)=4\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)+c$;

$4=4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+c$; $c=2$. **Ответ:** $x(t)=4\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)+2$

350. $a(t)=12\cdot t^2+4$, $t_0=1$, $x_0=12$, $v_0=10$

$v(t)=4\cdot t^3+4\cdot t+c_1$; $10=4+4+c_1$; $c_1=2$

$v(t)=4\cdot t^3+4\cdot t+2$; $x(t)=t^4+2\cdot t^2+2\cdot t+c_2$;

$12=1+2+2+c_2$; $c_2=7$ **Ответ:** $x(t)=t^4+2\cdot t^2+2\cdot t+7$

351. а) $F(t)=6-9\cdot t$, $t_0=1$, $x_0=-5$, $v_0=4$, $m=3$, $F=m\cdot a$

$a(t)=\frac{F(t)}{m}=2-3\cdot t$; $v(t)=2\cdot t-\frac{3}{2}\cdot t^2+c_1$; $4=2-\frac{3}{2}+c_1$; $c_1=3,5$

$v(t)=2\cdot t-\frac{3}{2}\cdot t^2+3.5$; $x(t)=t^2-\frac{1}{2}\cdot t^3+3.5\cdot t+c_2$;

$-5=1-\frac{1}{2}+3.5+c_2$; $c_2=-9$ **Ответ:** $x(t)=t^2-\frac{1}{2}\cdot t^3+3.5\cdot t-9$

б) $F(t)=14\cdot\sin(t)$, $t_0=\pi$, $x_0=3$, $v_0=2$, $m=7$

$a(t)=\frac{F(t)}{m}=2\cdot\sin(t)$; $v(t)=-2\cdot\cos(t)+c_1$; $2=-2\cdot\cos(\pi)+c_1$;

$c_1=0$; $v(t)=-2\cdot\cos(t)$; $x(t)=-2\cdot\sin(t)+c_2$; $3=-2\cdot\sin(\pi)+c_2$;

$c_2=3$ **Ответ:** $x(t)=-2\cdot\sin(t)+3$

в) $F(t)=25\cdot\cos(t)$, $t_0=\frac{\pi}{2}$, $x_0=4$, $v_0=2$, $m=5$

$a(t)=\frac{F(t)}{m}=5\cdot\cos(t)$; $v(t)=5\cdot\sin(t)+c_1$; $2=5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+c_1$;

$c_1 = -3$; $v(t) = 5 \cdot \sin(t) - 3$; $x(t) = -5 \cdot \cos(t) - 3 \cdot t + c_2$;

$4 = -5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3 \cdot \frac{\pi}{2} + c_2$; $c_2 = 4 + \frac{3 \cdot \pi}{2}$

Ответ: $x(t) = -5 \cdot \cos(t) - 3 \cdot t + 4 + \frac{3 \cdot \pi}{2}$

г) $F(t) = 8 \cdot t + 8$, $t_0 = 2$, $x_0 = 7$, $v_0 = 9$, $m = 4$

$a(t) = \frac{F(t)}{m} = 2 \cdot t + 2$; $v(t) = t^2 + 2 \cdot t + c_1$; $9 = 4 + 4 + c_1$; $c_1 = 1$

$v(t) = t^2 + 2 \cdot t + 1$; $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + t + c_2$; $7 = \frac{8}{3} + 4 + 2 + c_2$;

$c_2 = -1\frac{2}{3}$. **Ответ:** $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + t - 1\frac{2}{3}$

352. а) $f(x) = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4$, $M(-1;1) \in F_1(x)$, $N(0;3) \in F_2(x)$

$F(x) = x^3 - x^2 + 4 \cdot x + c$; $F_1(x) = x^3 - x^2 + 4 \cdot x + c_1$;

$1 = (-1)^3 - (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + c_1$; $c_1 = 7$; $F_2(x) = x^3 - x^2 + 4 \cdot x + c_2$;

$3 = 0 - 0 + 0 + c_2$; $c_2 = 3$; $F_1(x) - F_2(x) = c_1 - c_2 = 4$

Ответ: $F_1(x) - F_2(x) = 4$ График $F_1(x)$ выше, чем график $F_2(x)$

б) $f(x) = 4 \cdot x - 6 \cdot x^2 + 1$, $M(0;2) \in F_1(x)$, $N(1;3) \in F_2(x)$

$F(x) = 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 + x + c$; $F_1(x) = 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 + x + c_1$;

$2 = 0 - 0 + 0 + c_1$; $c_1 = 2$; $F_2(x) = 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 + x + c_2$;

$3 = 2 - 2 + 1 + c_2$; $c_2 = 2$; $F_1(x) - F(x)_2 = c_1 - c_2 = 0$

Ответ: $F_1(x) - F_2(x) = 0$ Графики совпадают

в) $f(x) = 4 \cdot x - x^3$, $M(2;1) \in F_1(x)$, $N(-2;3) \in F_2(x)$

$F(x) = 2 \cdot x^2 - \frac{x^4}{4} + c$; $F_1(x) = 2 \cdot x^2 - \frac{x^4}{4} + c_1$; $1 = 8 - 4 + c_1$; $c_1 = -3$

$F_2(x) = 2 \cdot x^2 - \frac{x^4}{4} + c_2$; $3 = 8 - 4 + c_2$; $c_2 = -1$; $F_1(x) - F(x)_2 = c_1 - c_2 = -2$

Ответ: $F_1(x) - F_2(x) = -2$ График $F_2(x)$ выше, чем график $F_1(x)$

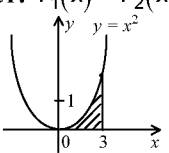
г) $f(x) = (2 \cdot x + 1)^2$, $M(-3;-1) \in F_1(x)$, $N\left(1;6\frac{1}{3}\right) \in F_2(x)$

$F(x) = \frac{(2 \cdot x + 1)^3}{6} + c$; $F_1(x) = \frac{(2 \cdot x + 1)^3}{6} + c_1$; $-1 = \frac{(2 \cdot (-3) + 1)^3}{6} + c_1$

$c_1 = 19\frac{5}{6}$; $F_2(x) = \frac{(2 \cdot x + 1)^3}{6} + c_2$; $6\frac{1}{3} = \frac{(2 + 1)^3}{6} + c_2$; $c_2 = 1\frac{5}{6}$

$F_1(x) - F(x)_2 = c_1 - c_2 = 19\frac{5}{6} - 1\frac{5}{6} = 18$ **Ответ:** $F_1(x) - F_2(x) = 18$

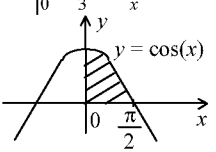
353. а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$; $F(x) = \frac{x^3}{3}$



$S = F(3) - F(0) = 9$ (кв. ед.)

б) $y = \cos(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

$F(x) = \sin(x)$

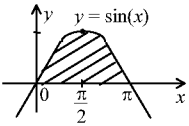


$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 1 - 0 = 1$ (кв.ед.)

в) $y = \sin(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

$F(x) = -\cos(x)$

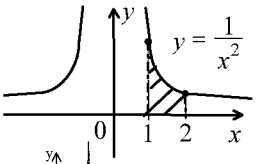
$S = F(\pi) - F(0) = 1 + 1 = 2$ (кв. ед.)



г) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$

$F(x) = -\dfrac{1}{x}$

$S = F(2) - F(1) = -\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$ (кв. ед.)

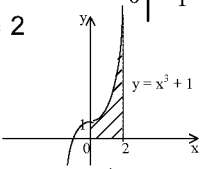


Ответ: а) 9; **б)** 1; **в)** 2; **г)** 0.5.

354. а) $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} + x$; $S = F(2) - F(0) =$

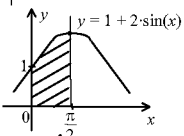
$= 4 + 2 - 0 = 6$ (кв. ед.)



б) $y = 1 + 2 \cdot \sin(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$

$F(x) = x - 2 \cdot \cos(x)$; $S = F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - F(0) =$

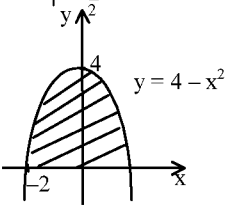
$= \dfrac{\pi}{2} - 0 + 2 = \dfrac{\pi + 4}{2}$ (кв. ед.)



в) $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = -2$

$F(x) = 4 \cdot x - \dfrac{x^3}{3}$; $S = F(2) - F(-2) =$

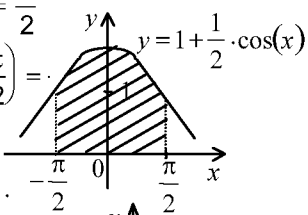
$= 8 - \dfrac{8}{3} + 8 - \dfrac{8}{3} = 10\dfrac{2}{3}$ (кв. ед.)



г) $y = 1 + \dfrac{1}{2} \cdot \cos(x)$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$

$F(x) = x + \dfrac{1}{2} \cdot \sin(x)$ $\quad S = F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) =$

$\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2} = \pi + 1$ (кв. ед.)

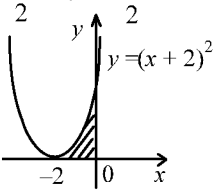


Ответ: а) 6; **б)** $\dfrac{\pi + 4}{2}$; **в)** $10\dfrac{2}{3}$; **г)** $\pi + 1$.

355. а) $y = (x + 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$

$F(x) = \dfrac{(x + 2)^3}{3}$

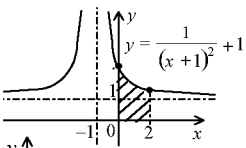
$S = F(0) - F(-2) = \dfrac{8}{3} - 0 = 2\dfrac{2}{3}$ (кв. ед.)



б) $y = \dfrac{1}{(x + 1)^2} + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

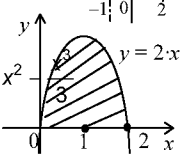
$F(x) = -\dfrac{1}{x + 1} + x$; $S = F(2) - F(0) =$

$= -\dfrac{1}{3} + 2 + 1 - 0 = 2\dfrac{2}{3}$ (кв.ед.)

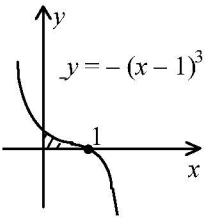


в) $y = 2 \cdot x - x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 0$ $\quad F(x) = x^2 - \dfrac{x^3}{3}$

$S = F(2) - F(0) = = 4 - \dfrac{8}{3} - 0 = 1\dfrac{1}{3}$ (кв.ед.)



г) $y=-(x-1)^3$, $y=0$, $x=0$, $x=1$

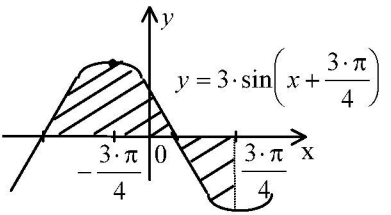


$$F(x)=-\frac{(x-1)^4}{4}$$

$$S=F(1)-F(0)=-0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\text{ (кв.ед.)}$$

Ответ: а) $2\frac{2}{3}$; **б)** $2\frac{2}{3}$; **в)** $1\frac{1}{3}$; **г)** $\frac{1}{4}$.

356. а) $y=3\cdot\sin\left(x+\frac{3\cdot\pi}{4}\right)$, $y=0$, $x=-\frac{3\cdot\pi}{4}$, $x=\frac{3\cdot\pi}{4}$

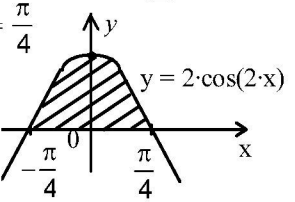


$$F(x)=-3\cdot\cos\left(x+\frac{3\cdot\pi}{4}\right)$$

$$S=F\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)-F\left(-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)=$$

$= 0 + 3 = 3$ (кв.ед.)

б) $y=2\cdot\cos(2\cdot x)$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$



$$F(x)=\sin(2\cdot x)$$

$$S=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$= 1 + 1 = 2$ (кв.ед.)

в) $y=\sin(x)-\frac{1}{2}$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\cdot\pi}{6}$

$$F(x)=-\cos(x)-\frac{x}{2}$$

$$S=F\left(\frac{5\cdot\pi}{6}\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\cdot\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\text{ (кв.ед.)}$$

г) $y=1-\cos(x)$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$

$$F(x)=x-\sin(x);\ S=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}-1=\pi-2\text{ (кв.ед.)}$$

Ответ: а) 3; **б)** 2; **в)** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$; **г)** $\pi-2$.

357. а) $\int_{-1}^{2}x^4dx=\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{2}=\frac{32}{5}+\frac{1}{5}=\frac{33}{5}=6{,}6$

б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx=\sin(x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$

в) $\int_{1}^{3}x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_{1}^{3}=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=\frac{80}{4}=20$

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2(x)} = tg(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - 0 = 1$ **Ответ: а)** 6,6; **б)** 1; **в)** 20; **г)** 1.

358. а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(2\cdot x+1)^2} = -\frac{1}{2\cdot(2\cdot x+1)}\Big|_1^2 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

б) $\int\limits_0^{\pi} 3\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 6\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 6 - 0 = 6$

в) $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0{,}9$

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\cdot x)dx = -\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

Ответ: а) $\frac{1}{15}$; **б)** 6; **в)** 0,9; **г)** 0,5.

359. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2(x)} = tg(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - 0 = 1$

$\int\limits_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$ Следовательно, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int\limits_0^1 dx$

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + 1 = 0{,}5$

$\int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\cdot\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5$ Следовательно, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$

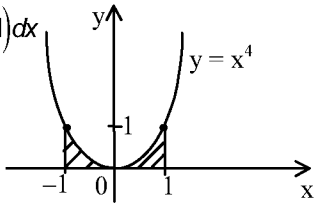
$\int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{3} - 0 = 1$ Следовательно, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2dx$

г) $\int\limits_0^1 (2\cdot x+1)dx = \left(x^2 + x\right)\Big|_0^1 = 1 + 1 - 0 = 2$

$\int\limits_0^2 \left(x^3 - 1\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Big|_0^2 = 4 - 2 - 0 = 2$

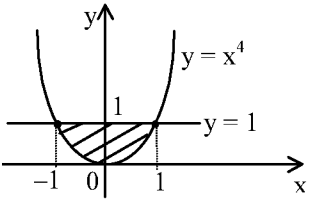
Следовательно, $\int_0^1 (2\cdot x+1)dx = \int_0^2 (x^3-1)dx$

360. а) $y = x^4$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$



$$S = 2\cdot\int_0^1 x^4 dx = 2\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = 0{,}4 \text{ (кв.ед.)}$$

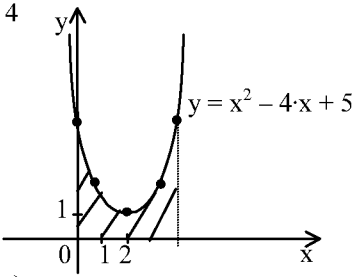
б) $y = x^4$, $y = 1$



$$S = \int_{-1}^1 (1-x^4)dx = \left(x-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^1 =$$

$$= 1-\frac{1}{5}+1-\frac{1}{5} = 1\frac{3}{5} \text{ (кв.ед.)}$$

в) $y = x^2 - 4\cdot x + 5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$

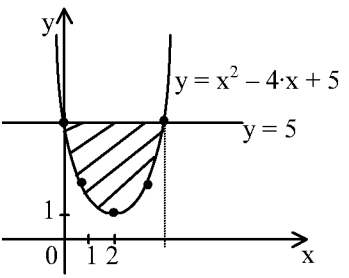


$$S = 2\cdot\int_2^4 (x^2-4\cdot x+5)dx =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{x^3}{3}-2\cdot x^2+5\cdot x\right)\Big|_2^4 =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{64}{3}-32+20\right)-2\cdot\left(\frac{8}{3}-8+10\right) = 9\frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

г) $y = x^2 - 4\cdot x + 5$, $y = 5$



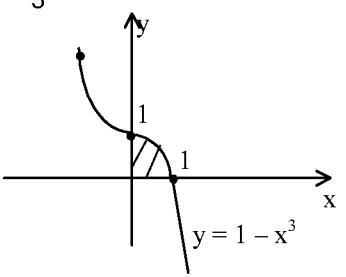
$$S = \int_0^4 (5-x^2+4\cdot x-5)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}+2\cdot x^2\right)\Big|_0^4 =$$

$$= -\frac{64}{3}+32-0 = 10\frac{2}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

Ответ: а) 0,4; **б)** $1\frac{3}{5}$; **в)** $9\frac{1}{3}$; **г)** $10\frac{2}{3}$.

361. а) $y = 1 - x^3$, $y = 0$, $x = 0$



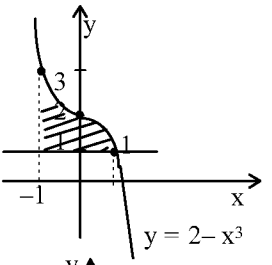
$$S = \int_0^1 (1-x^3)dx = \left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 1-\frac{1}{4} = 0.75 \text{ (кв.ед.)}$$

б) $y = 2 - x^3$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$

$$S = \int_{-1}^{1}(2 - x^3)\,dx - 2 = \left(2x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} - 2 =$$

$$= 2 - \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{4} - 2 = 2 \text{ (кв.ед.)}$$

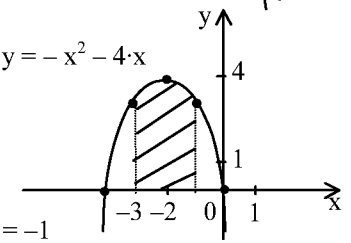


в) $y = -x^2 - 4\cdot x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$

$$S = \int_{-3}^{-1}\left(-x^2 - 4\cdot x\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - 2\cdot x^2\right)\Bigg|_{-3}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{3} - 2 - 9 + 18 = 7\frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

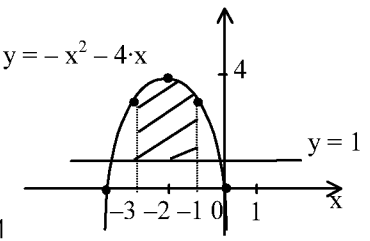


г) $y = -x^2 - 4\cdot x$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -1$

$$S = \int_{-3}^{-1}\left(-x^2 - 4\cdot x - 1\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - 2\cdot x^2 - x\right)\Bigg|_{-3}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + 1 - 9 + 18 - 3 = 5\frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$



Ответ: а) 0,75; **б)** 2; **в)** $7\frac{1}{3}$; **г)** $5\frac{1}{3}$.

362. а) $\int_{-\pi}^{2\pi}\sin\left(\frac{x}{3}\right)dx = -3\cdot\cos\left(\frac{x}{3}\right)\Big|_{-\pi}^{2\pi} = -3\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 3$

б) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2\cdot x + 5}} = \sqrt{2\cdot x + 5}\Big|_{-2}^{2} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 2$

в) $\int_{0}^{3\cdot\pi}\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{9}\right)} = 9\cdot tg\left(\frac{x}{9}\right)\Big|_{0}^{3\cdot\pi} = 9\cdot tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9\cdot\sqrt{3}$

г) $\int_{-2}^{6}\frac{dx}{\sqrt{x + 3}} = 2\cdot\sqrt{x + 3}\Big|_{-2}^{6} = 2\cdot\sqrt{9} - 2\cdot\sqrt{1} = 4$

Ответ: а) 3; **б)** 2; **в)** $9\cdot\sqrt{3}$; **г)** 4.

363. а) $\int_{0}^{\frac{2\cdot\pi}{3}}\left(\sin\left(\frac{x}{4}\right) + \cos\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2 dx =$

$$= \int_{0}^{\frac{2\cdot\pi}{3}}\left(1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = \left(x - 2\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Bigg|_{0}^{\frac{2\cdot\pi}{3}} = \frac{2\cdot\pi}{3} - 1 + 2 = 1 + \frac{2\cdot\pi}{3}$$

б) $\int_0^2 (1+2\cdot x)^3 dx = \frac{(1+2\cdot x)^4}{8}\Big|_0^2 = \frac{5^4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{625-1}{8} = \frac{624}{8} = 78$

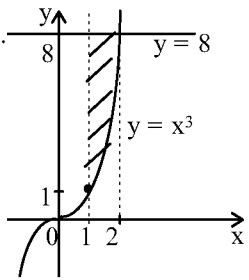
в) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos(2\cdot x))dx = \left(x + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + 0{,}25$

г) $\int_1^4 \left(x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx = \int_1^4 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx =$

$= \left(\frac{x^2}{2} + 2\cdot\sqrt{x}\right)\Big|_1^4 = \frac{16}{2} + 4 - \frac{1}{2} - 2 = 9\frac{1}{2}$ (кв.ед.)

Ответ: а) $1+\frac{2\cdot\pi}{3}$; **б)** 78; **в)** $\frac{\pi}{12} + 0{,}25$; **г)** $9\frac{1}{2}$.

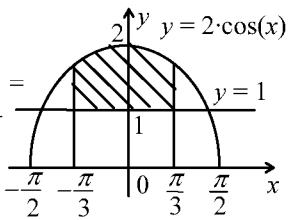
364. а) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$



$S = \int_1^2 (8 - x^3)dx = \left(8\cdot x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2 =$

$= 16 - 4 - 8 + \frac{1}{4} = 4{,}25$ (кв.ед.)

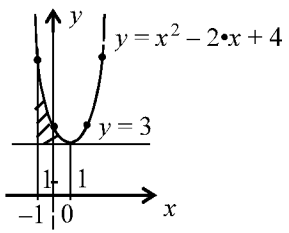
б) $y = 2\cdot\cos(x)$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$



$S = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cdot\cos(x) - 1)dx = (2\cdot\sin(x) - x)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} =$

$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = 2\cdot\sqrt{3} - \frac{2\cdot\pi}{3}$ (кв.ед.)

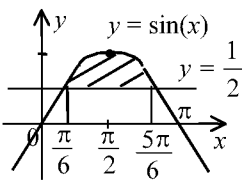
в) $y = x^2 - 2\cdot x + 4$, $y = 3$, $x = -1$



$S = \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x + 4 - 3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{1} =$

$= \frac{1}{3} - 1 + 1 + \frac{1}{3} + 1 + 1 = 2\frac{2}{3}$ (кв.ед.)

г) $y = \sin(x)$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\cdot\pi}{6}$



$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\cdot\pi}{6}} \left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right)dx = \left(-\cos(x) - \frac{x}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\cdot\pi}{6}} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\cdot\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (кв.ед.)

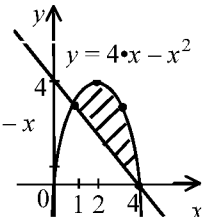
Ответ: а) 4,25; **б)** $2\cdot\sqrt{3} - \frac{2\cdot\pi}{3}$; **в)** $2\frac{2}{3}$; **г)** $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

365. а) $y = 4\cdot x - x^2$, $y = 4 - x$

$$S = \int_1^4 \left(4\cdot x - x^2 - 4 + x\right)dx = \left(\frac{5\cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4\cdot x\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{5\cdot 16}{2} - \frac{64}{3} - 16 - \frac{5}{2} + \frac{1}{3} + 4 =$$

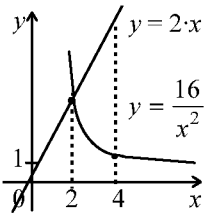
$$= 40 - 21\frac{1}{3} - 16 - 2.5 + \frac{1}{3} + 4 = 4{,}5 \text{ (кв.ед.)}$$



б) $y = \dfrac{16}{x^2}$, $y = 2\cdot x$, $x = 4$

$$S = \int_0^2 2\cdot x dx + \int_2^4 \frac{16}{x^2}dx = x^2\Big|_0^2 - \frac{16}{x}\Big|_2^4 =$$

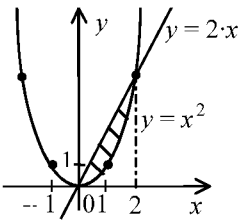
$$= 4 - \frac{16}{4} + \frac{16}{2} = 8 \text{ (кв.ед.)}$$



в) $y = x^2$, $y = 2\cdot x$

$$S = \int_0^2 \left(2\cdot x - x^2\right)dx = x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 =$$

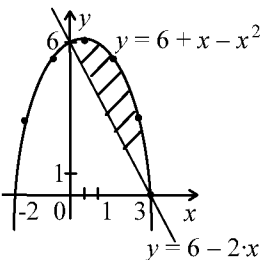
$$= 4 - \frac{8}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$



г) $y = 6 - 2\cdot x$, $y = 6 + x - x^2$

$$S = \int_0^3 \left(6 + x - x^2 - 6 + 2\cdot x\right)dx =$$

$$= \left(\frac{3\cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = 4.5 \text{ (кв.ед.)}$$

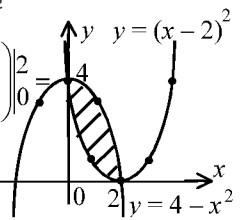


Ответ: а) 4.5; **б)** 8; **в)** $1\frac{1}{3}$; **г)** 4.5.

366. а) $y = x^2 - 4\cdot x + 4 = (x - 2)^2$, $y = 4 - x^2$

$$\int_0^2 \left(4 - x^2 - (x-2)^2\right)dx = \left(4\cdot x - \frac{x^3}{3} - \frac{(x-2)^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 8 - \frac{8}{3} - 0 = 5\frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

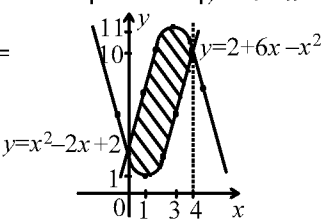


б) $y = x^2 - 2\cdot x + 2$, $y = 2 + 6\cdot x - x^2$

$$S = \int_0^4 \left(2 + 6\cdot x - x^2 - x^2 + 2\cdot x - 2\right)dx =$$

$$= \left(4\cdot x^2 - \frac{2\cdot x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= 64 - \frac{128}{3} = 64 - 42\frac{2}{3} = 21\frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

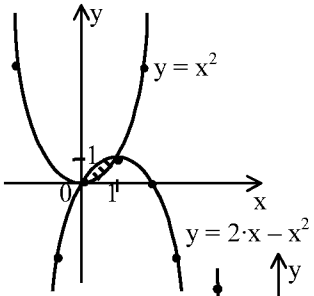


в) $y = x^2$, $y = 2\cdot x - x^2$

$$S = \int_0^1 \left(2\cdot x - x^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \left(x^2 - \frac{2\cdot x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

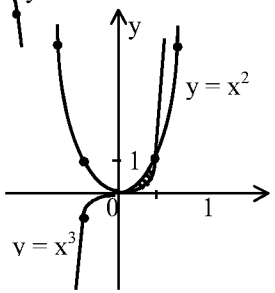
$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$



г) $y = x^2$, $y = x^3$

$$S = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ (кв.ед.)}$$



Ответ: а) $5\frac{1}{3}$; **б)** $21\frac{1}{3}$; **в)** $\frac{1}{3}$; **г)** $\frac{1}{12}$.

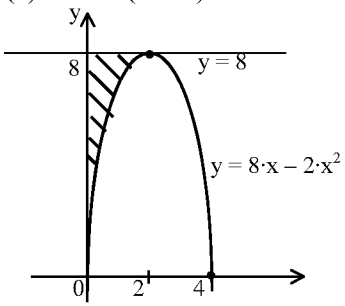
367. $y = 8\cdot x - 2\cdot x^2$, и касательная к функции в ее вершине, и прямой $x = 0$. $y' = 8 - 4\cdot$хвершина (2; 8)

$y'(2) = 8 - 8 = 0$; $y(2) = 8$; $f(x) = 8 + 0\cdot(x - 2) = 8$

$$S = \int_0^2 \left(8 - 8x + 2x^2\right)dx =$$

$$= \left(8\cdot x - 4\cdot x^2 + \frac{2\cdot x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 16 - 16 + \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$



Ответ: $S = 5\frac{1}{3}$.

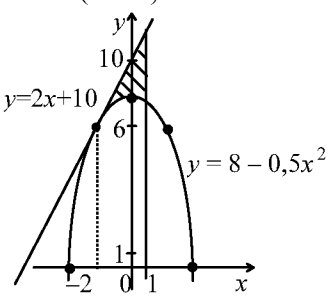
368. $f(x) = 8 - 0.5\cdot x^2$, касательная к нему в точке $x = -2$ и прямой $x = 1$.

$f'(x) = -x$; $f(-2) = 6$; $f'(-2) = 2$; $y = 6 + 2\cdot(x + 2) = 2\cdot x + 10$

$$S = \int_{-2}^{1} \left(2\cdot x + 10 - 8 + 0.5\cdot x^2\right)dx =$$

$$= \left(x^2 + 2\cdot x + \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 1 + 2 + \frac{1}{6} - 4 +$$

$$+ 4 + \frac{4}{3} = 3 + \frac{3}{2} = 4.5 \text{ (кв.ед.)}$$



Ответ: $S = 4.5$.

369. а) $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \left(F(x) + G(x)\right)\Big|_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$

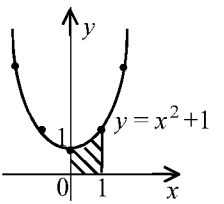
$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a))$$

Следовательно, $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

б) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ Пусть F(x) – первообразная для f(x), тогда kF(x) – первообразная для $k f$(x).

$$\int_a^b kf(x)dx = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = \int_a^b kf(x)dx$$

370. а) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

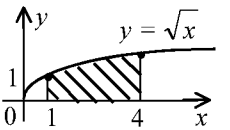


$$V = \int_0^1 \pi \cdot f^2(x)dx$$

$$V = \int_0^1 \pi(x^2+1)^2 dx = \int_0^1 \pi(x^4 + 2x^2 + 1)dx =$$

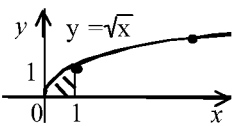
$$= \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2 \cdot x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = 1\frac{13}{15} \cdot \pi$$

б) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$



$$V = \int_1^4 \pi(\sqrt{x})^2 dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 = \pi\left(8 - \frac{1}{2}\right) = 7{,}5\pi$$

в) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $y = 0$

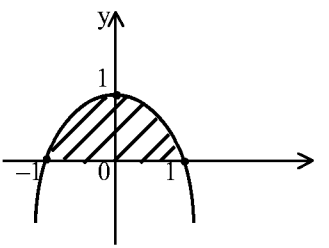


$$V = \int_0^1 \pi \cdot (\sqrt{x})^2 dx = \left(\frac{x^2}{2} \cdot \pi\right)\Bigg|_0^1 = 0{,}5 \cdot \pi$$

г) $y = 1 - x^2$, $y = 0$

$$V = \int_{-1}^1 \pi \cdot (1 - x^2)^2 dx = \int_{-1}^1 \pi \cdot (1 - 2 \cdot x^2 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^1 =$$

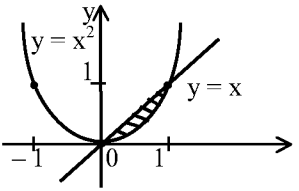


$$= \pi \cdot \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \pi \cdot \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) =$$

$$= \frac{8}{15} \cdot \pi + \frac{8}{15} \cdot \pi = \frac{16}{15} \cdot \pi$$

Ответ: а) $1\frac{13}{15} \cdot \pi$; **б)** $7.5 \cdot \pi$; **в)** $0.5 \cdot \pi$; **г)** $\frac{16}{15} \cdot \pi$.

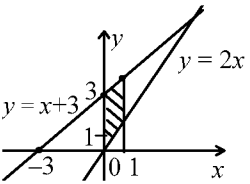
371. а) $y = x^2$, $y = x$



$$V = \int_0^1 \pi \cdot x^2 dx - \int_0^1 \pi \cdot (x^2)^2\, dx =$$

$$= \frac{\pi \cdot x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{\pi \cdot x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \pi - \frac{1}{5} \cdot \pi = \frac{2 \cdot \pi}{15}$$

б) $y = 2 \cdot x$, $y = x + 3$, $x = 0$, $x = 1$

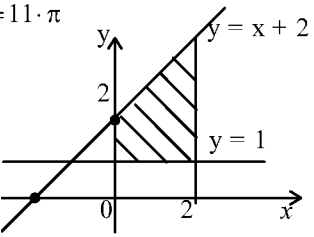


$$V = \int_0^1 \pi \cdot (x+3)^2 dx - \int_0^1 4 \cdot \pi \cdot x^2 dx =$$

$$= \left(\frac{\pi \cdot (x+3)^3}{3} - \frac{4 \cdot \pi \cdot x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{64 \cdot \pi}{3} - 9 \cdot \pi - \frac{4 \cdot \pi}{3} = 21\frac{1}{3} \cdot \pi - 10\frac{1}{3} \cdot \pi = 11 \cdot \pi$$

в) $y = x + 2$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$

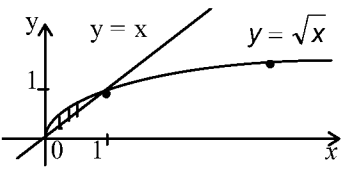


$$V = \int_0^2 \pi \cdot (x+2)^2 dx - \int_0^2 \pi dx =$$

$$= \pi \cdot \frac{(x+2)^3}{3}\Big|_0^2 - \pi \cdot x\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{64 \cdot \pi}{3} - \frac{8 \cdot \pi}{3} - 2 \cdot \pi = 21\frac{1}{3} \cdot \pi - 4\frac{2}{3} \cdot \pi = 16\frac{2}{3} \cdot \pi$$

г) $y = \sqrt{x}$, $y = x$



$$V = \int_0^1 \pi \cdot \left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \int_0^1 \pi \cdot x^2 dx =$$

$$= \frac{\pi \cdot x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{\pi \cdot x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: а) $\frac{2 \cdot \pi}{15}$; **б)** $11 \cdot \pi$; **в)** $16\frac{2}{3} \cdot \pi$; **г)** $\frac{\pi}{6}$.

372. а) $x^2 + y^2 = R^2, x = R - H, x = R, y = 0$

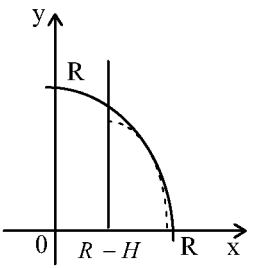
$$V = \int_{R-H}^{R} \pi \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{R-H}^{R} \left(R^2 - x^2 \right) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{R-H}^{R} =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - R^2 (R - H) + \frac{(R-H)^3}{3} \right) =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - R^3 + R^2 H + \frac{1}{3} \times \right.$$

$$\left. \times \left(R^3 - 3R^2 H + 3RH^2 - H^3 \right) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(3RH^2 - H^3 \right) = \frac{\pi}{3} H^2 (3R - H)$$



Ответ: $V = \frac{\pi}{3} H^2 (3R - H)$

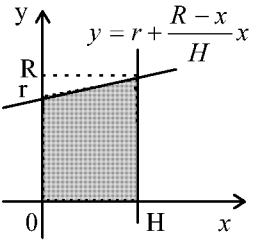
б) $y = r + \frac{R-r}{H}x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = H$

$$V = \int_0^H \pi\left(r + \frac{R-r}{H}x\right)^2 dx = \pi\left(r^2x + \frac{r(R-r)}{H}x^2 + \frac{(R-r)^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= \pi\left(r^2H + r(R-r)H + \frac{(R-r)^2H}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi H}{3}\left(3r^2 + 3rR - 3r^2 + R^2 - 2Rr + r^2\right) =$$

$$= \frac{\pi H}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$



Ответ: $V = \frac{\pi H}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$

373. F = k·x, где k – коэффициент сжатия пружины.

2 = k · 0,01x = 1 см = 0,01 м k = 200$F_в$ = 2·H

$A = \int_a^b F(x)dx$, a = 0, b = 4 см =0,04 м Следовательно, F = 200·x

$$A = \int_0^{0,04} (200\cdot x)dx = 100\cdot x^2\Big|_0^{0,04} = 100\cdot 0,0016 = 0,16 \text{ Дж}$$

Ответ: A = 0.16 Дж.

374. F = k·x F = 4·H; x = 8 см = 0,08 м 4 = k·0,08 k = 50

F = 50·x a = 0; b = 0,08 м

$$A = \int_0^{0,08} (50\cdot x)dx = 25\cdot x^2\Big|_0^{0,08} = 25\cdot 0,0064 = 0,16 \text{ Дж}$$

Ответ: A = 0,16 Дж.

375. $F(x) = -\frac{\gamma\cdot q}{x^2}$,где $\gamma > 0$ – некоторая постоянная

Поэтому $A = \int_a^b \left(\frac{-\gamma\cdot q}{x^2}\right)\ dx = \frac{\gamma\cdot q}{x}\Big|_a^b = \gamma\cdot q\cdot\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$

Ответ: $A = \gamma\cdot q\cdot\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$.

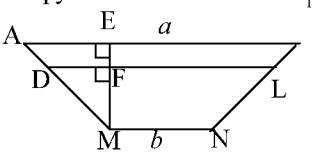
376. Сила давления жидкости на погруженную в нее пластину (вертикальную) вычисляется по формуле $P = \rho\cdot g\cdot\int_{h_1}^{h_2} S(x)dx$, где

S (x) – площадь пластинки, глубина погружения h меняется от h_1 до h_2.

$\Delta AEM \sim \Delta ADF$

$\frac{DF}{AE} = \frac{MF}{ME}$

Пусть $MF = x$



$$DF = \frac{AE \cdot MF}{ME} \quad AE = \frac{a-b}{2}, \quad ME = h \qquad DF = \frac{(a-b)\cdot x}{2\cdot h}$$

$$S_{MDLN} = \frac{1}{2}\cdot\left(b + b + \frac{2\cdot(a-b)\cdot x}{2\cdot h}\right)\cdot x = \frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot b\cdot x + \frac{(a-b)\cdot x^2}{h}\right)$$

$$P = \rho\cdot g\cdot\int_0^h \frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot b\cdot x + \frac{(a-b)\cdot x^2}{h}\right)dx = \frac{\rho\cdot g}{2}\cdot\left(b\cdot x^2 + \frac{(a-b)\cdot x^3}{3\cdot h}\right)\Bigg|_0^h =$$

$$= \frac{\rho\cdot g}{2}\cdot\left(b\cdot h^2 + \frac{(a-b)\cdot h^2}{3}\right) = \rho\cdot g\cdot\frac{(a+2\cdot b)h^2}{6}$$ **Ответ:** $P = \rho\cdot g\cdot\frac{(a+2\cdot b)\cdot h^2}{6}$.

377. $A = P = \rho\cdot g\cdot\int_0^h(\pi\cdot r^2\cdot x)dx = \rho\cdot g\cdot\pi\cdot r^2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^h = \frac{\pi\cdot r^2\cdot h^2}{2}\cdot\rho\cdot g$

Ответ: $A = \frac{\pi\cdot r^2\cdot h^2}{2}\cdot\rho\cdot g$.

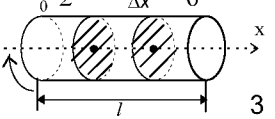
378. $A = \rho\cdot g\cdot\int_0^R\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3dx = \rho\cdot g\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3\cdot x\Big|_0^R = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^4\cdot\rho\cdot g$

Ответ: $A = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^4\cdot\rho\cdot g$.

379. Масса части стержня равна $\rho\cdot S\cdot\Delta x$ принебрежем диаметром стержня (считаем отмеченную часть отрезком длиной Δx), тогда с точностью до величин порядка Δx линейная скорость каждой точки этой части равна $\omega\cdot x$. Обозначим через $E(x)$ кинетическую энергию части $\{0;x\}$ стержня. Приращение кинетической энергии за счет отрезка $[x; x+\Delta x]$ приблизительно равно $\frac{m\cdot V^2}{2}$, т. е. $\frac{\rho\cdot S\cdot\omega^2\cdot x^2\cdot\Delta x}{2}$, поэтому $E'(x) = \frac{\rho\cdot S\cdot\omega^2\cdot x^2}{2}$; $E(0) = 0$, и следовательно, искомая энергия есть

$$E(l) = \int_0^l E'(x)\,dx = \int_0^l\frac{\rho\cdot S\cdot\omega^2\cdot x^2}{2}dx = \rho\cdot S\cdot\omega^2\cdot\int_0^l\frac{x^2}{2}dx = \frac{\rho\cdot S\cdot\omega^2\cdot l^3}{6}$$

$\omega = 10\cdot\pi$ с$^{-1}$, S = 4 см^2, ρ = 7,8 г/см^3



Ответ: $E(l) = 4.160.000\cdot\pi^2$ эрг.

380. Ответ: Точка высоты конуса, находящаяся на расстоянии $\frac{3}{4}$ высоты, считая от его вершины.

Задачи на повторение к главе 3.

1. 2) **а)** $F'(x) = \left(x^2 + 3\cdot x + 1\right)' = 2\cdot x + 3 = f(x)$

б) $F'(x) = \left(-\frac{\cos(2x)}{2} + 3x\right)' = \frac{2\sin(2x)}{2} + 3 = \sin(2x) + 3 = f(x)$

в) $F'(x) = \left(-\frac{x^4}{4} + 5\cdot x + 2\right)' = -x^3 + 5 = f(x)$

г) $F'(x) = \left(-2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right) + x\right)' = -\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = f(x)$

3) **а)** $F'(x) = \left(x^2 - x\right)' = 2\cdot x - 1 = f(x) \Rightarrow F(x)$ – первообразная *f(x)*

б) $F'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \sin(x)\right)' = -\frac{2}{x^3} - \cos(x) \neq f(x) \Rightarrow F(x)$ – не первообр. для *f(x)*

в) $F'(x)=\left(x^3+1\right)'=3\cdot x^2\neq f(x)\Rightarrow F(x)$ не является первообразной для *f(x)*

г) $F'(x)=\left(x+\cos(x)\right)'=1-\sin(x)=f(x)\Rightarrow F(x)-$ первообразная для *f(x)*

2. 2) **а)** $F(x)=\dfrac{kx^2}{2}+bx+c$ **в)** $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$

б) $F(x)=tgx+c$ **г)** $F(x)=\sin x+c$

3) **а)** $F(x)=-\cos x-\sin x+c,\ 1=-\cos\pi-\sin\pi+c,\ c=0,$
$F(x)=-\cos x-\sin x$

б) $F(x)=\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{3}{x}+c;\ 5=3+1+c;\ c=2\quad F(x)=\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{3}{x}+1$

в) $F(x)=x^2-5x+c,\ -2=1-5+c,\ c=2,\ F(x)=x^2-5x+2$

г) $F(x)=2\sqrt{x-2}+c,\ 10=4+c,\ c=6,\ F(x)=2\sqrt{x-2}+6$

3. 2) **а)** $F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos 3x-4tg\dfrac{x}{2}+c$

б) $F(x)=-\dfrac{3x^{-3}}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}}+c=-\dfrac{1}{x^3}-\sqrt{x}+c$

в) $F(x)=-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{(4-5x)^4}{4}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{(2x-1)^2}+c=-\dfrac{(4-5x)^4}{20}+\dfrac{1}{4(2x-1)^2}+c$

г) $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot 10\sin 2x+c=\dfrac{x^2}{2}-5\sin 2x+c$

3) **а)** $F(x)=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(2-3x)^3}{3}+c,\ 2=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(2-3)^3}{3}+c,$

$2=\dfrac{1}{9}+c,\ c=1\dfrac{8}{9},\ F(x)=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(2-3x)^3}{3}+1\dfrac{8}{9}$

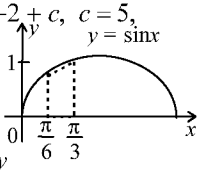
б) $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+c,\ -2=-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}+c,$

$-2=0+c,\ c=-2,\ F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x-2$

в) $F(x)=\sqrt{2}\sin x+c,\ 2=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}+c,\ 2=\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}+c,\ c=1,$
$F(x)=\sqrt{2}\sin x+1$

г) $F(x)=-2\sqrt{x}+1+c,\ 3=-2\sqrt{0+1}+c,\ 3=-2+c,\ c=5,$
$F(x)=-2\sqrt{x+1}+5$

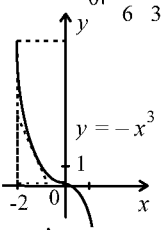
4. 3) **а)** $y=\sin(x),\ y=0,\ x=\dfrac{\pi}{6},\ x=\dfrac{\pi}{3}$



$S=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin(x)dx=-\cos(x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=$

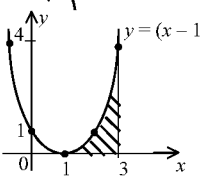
$=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ (кв.ед.)

б) $y=-x^3,\ y=0,\ x=-2$



$S=\int\limits_{-2}^{0}-x^3dx=-\dfrac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}=\dfrac{16}{4}=4$ (кв.ед.)

в) $y=(x-1)^2,\ y=0,\ x=3$



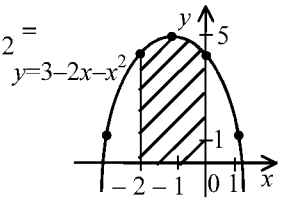
$S=\int\limits_{1}^{3}(x-1)^2dx=\dfrac{(x-1)^3}{3}\Big|_{1}^{3}=$

$=\dfrac{8}{3}=2\dfrac{2}{3}$ (кв.ед.)

г) $y = 3 - 2\cdot x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$

$$S = \int_{-2}^{0}\left(3 - 2\cdot x - x^2\right)dx = \left(3\cdot x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{0} =$$

$$= 0 - \left(-6 - 4 + \frac{8}{3}\right) = 3 + 4 - \frac{8}{3} = 7\frac{1}{3}$$



Ответ: а) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; **б)** 4; **в)** $2\frac{2}{3}$; **г)** $7\frac{1}{3}$.

5. 2) **а)** $\int_{-3}^{3}\frac{dx}{(x+10)^2} = -\frac{1}{x+10}\Bigg|_{-3}^{3} = -\frac{1}{13} + \frac{1}{7} = \frac{6}{91}$

б) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\cdot\sqrt{x}\Bigg|_{1}^{2} = 2\cdot\sqrt{2} - 2 = 2\cdot\left(\sqrt{2} - 1\right)$

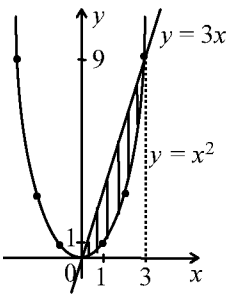
в) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin(x)dx = -\cos(x)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$ **г)** $\int_{0}^{3}x^2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{3} = 9 - 0 = 9$

Ответ: а) $\frac{6}{91}$; **б)** $2\cdot\left(\sqrt{2} - 1\right)$; **в)** 1.5; **г)** 9.

3) **а)** $y = x^2$, $y = 3\cdot x$

$$S = \int_{0}^{3}\left(3\cdot x - x^2\right)dx = \left(\frac{3\cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{3} =$$

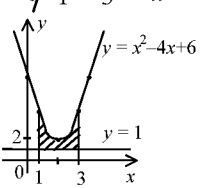
$$= \frac{27}{2} - 9 = 4.5 \text{ (кв.ед.)}$$



б) $y = x^2 - 4\cdot x + 6$, $y = 1$, $x = 1$, $x = 3$

$$S = \int_{1}^{3}\left(x^2 - 4\cdot x + 6 - 1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2\cdot x^2 + 5\cdot x\right)\Bigg|_{1}^{3} =$$

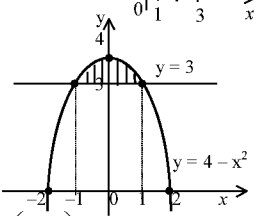
$$= 9 - 18 + 15 - \frac{1}{3} + 2 - 5 = 2\frac{2}{3} \text{ (кв.ед.)}$$



в) $y = 4 - x^2$, $y = 3$

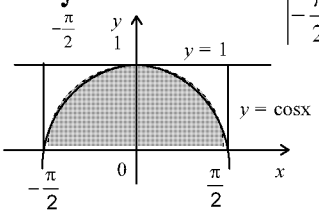
$$S = \int_{-1}^{1}\left(4 - x^2 - 3\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$



г) $y = \cos(x)$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(x)\right)dx = \left(\sin(x)\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2 \text{ (кв.ед.)}$$



Ответ: а) 4.5; **б)** $2\frac{2}{3}$; **в)** $1\frac{1}{3}$; **г)** 2.